

**Instytut Agrofizyki  
im. Bohdana Dobrzańskiego PAN  
w Lublinie**

**ACTA AGROPHYSICA**

**42**

**Wiktor Pietrzyk**

**MODELE ZIARNIAKÓW ZBÓŻ  
STOSOWANE W ANALIZIE  
ELEKTRODYNAMICZNEJ**

Monografia

Lublin 2001

### **Komitet Redakcyjny**

Redaktor Naczelny - prof. dr hab. Jan Gliński, czł. koresp. PAN

Z-cy Redaktora Naczelnego:

prof. dr hab. Ryszard T. Walczak, czł. koresp. PAN - fizyka środowiska

prof. dr hab. Bogusław Szot - fizyka materiałów roślinnych

prof. dr hab. Ryszard Dębicki - gleboznawstwo

### **Rada Redakcyjna**

prof. dr hab. J. Haman, czł. rzecz. PAN - przewodniczący

prof. dr hab. T. Brandyk

prof. dr hab. J. Laskowski

prof. dr hab. I. Dechnik

prof. dr hab. P.P. Lewicki

prof. dr hab. D. Drozd

prof. dr hab. S. Nawrocki, czł. rzecz. PAN

prof. dr hab. F. Dubert

prof. dr hab. E. Niedźwiecki

prof. dr hab. J. Fornal

prof. dr hab. J. Siewiesiuk

prof. dr hab. E. Kamiński

prof. dr hab. W. Stępniewski

prof. dr hab. A. Kędziora

prof. dr hab. Z. Ślipek

prof. dr hab. T. Kęsik

prof. dr hab. S. Zawadzki, czł. rzecz. PAN

prof. dr hab. Cz. Koźmiński

### **Redaktor tomu**

Prof. dr hab. inż. Wiktor Pietrzyk

### **Opiniował do druku**

Prof. dr hab. Roman Koper

### **Adres redakcji**

Instytut Agrofizyki im. Bohdana Dobrzańskiego PAN, ul. Doświadczalna 4, P.O. Box 201  
20-290 Lublin 27, tel. (0-81) 744-50-61, e-mail: editor@demeter.ipan.lublin.pl

### **Publikacja indeksowana przez**

Polish Scientific Journals Contents - Agric. & Biol. Sci. w sieci Internet  
pod adresem <http://saturn.ci.uw.edu.pl/psjc/> lub <http://ciuw.warman.net.pl/alf/psjc>

Publikacja finansowana z Programu Leonardo da Vinci, projekt Nr 09112/99.

Sekretariat Generalny Komisji Wspólnoty Europejskiej DG XII nie ponosi  
odpowiedzialności za treści zawarte w niniejszej publikacji.

This publication is supported from Leonardo da Vinci grant No 09112/99.  
European Commission General Directorate DG XXII does not take responsibility  
for the content of this publication.

© Copyright by Instytut Agrofizyki im. Bohdana Dobrzańskiego PAN, Lublin 2001

ISBN 83-87385-61-1

ISSN 1234-4125

Wydanie I. Nakład 150 egz. Ark. wyd. 9,0

Skład komputerowy: inż. Elżbieta Porzyc

Druk: Zakład Usług Poligraficznych TEKST s.c., ul. Wspólna 19, 20-344 Lublin

*Autor pragnie wyrazić wdzięczność i serdecznie podziękować  
Panu Profesorowi dr hab. Pawłowi Roliczowi za dyskusję  
wyników tej pracy oraz inspirujące uwagi, które przyczyniły się  
do usunięcia usterek i pomogły wnieść szereg ulepszeń*

*W. Pietrzyk*

*Kwiecień, 2001 rok*

## SPIS TREŚCI

Przedmowa do serii wydawniczej Leonardo da Vinci.....	3
Preface for Leonardo da Vinci editorial series.....	4
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ .....	5
1. WSTĘP I CEL PRACY .....	7
2. BUDOWA ZIARNIAKA I JEGO WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNO-ELEKTRYCZNE .....	10
2.1. Budowa ziarniaka .....	10
2.2. Właściwości elektryczne ziarniaka .....	13
2.2.1. Rezystancja nasion .....	14
2.2.2. Przenikalność elektryczna nasion .....	15
2.2.3. Tangens kąta stratności nasion .....	17
3. UOGÓLNIONE ELEKTRYCZNE MODELE ZIARNIAKA I PROBLEMY TEORETYCZNEJ ANALIZY JEGO POLA.....	20
3.1. Ziarniak jako jednorodna dielektryczna elipsoida .....	20
3.2. Ziarniak jako jednorodna dielektryczna elipsoida o niezerowej przewodności .....	21
3.3. Ziarniak jako dielektryczna sferoida o budowie warstwowej .....	22
4. SIŁY MECHANICZNE DZIAŁAJĄCE NA ZIARNIAK W JEDNORODNYM POLU ELEKTRYCZNYM .....	24
4.1. Siły ponderomotoryczne .....	24
4.1.1. Siły wywołane ładunkiem swobodnym ziarniaka .....	24
4.1.2. Siły wywołane ładunkiem przesunięcia .....	24
4.2. Siły elektrostrykcyjne .....	26
5. ZAŁOŻENIA PODSTAWOWE .....	27
5.1. Założenia idealizujące .....	27
5.2. Wybór układu współrzędnych .....	28
5.3. Wybór metody analizy pola .....	29
6. ZACHOWANIE SIĘ ZIARNIAKA O STRUKTURZE JEDNORODNEJ I KSZTAŁCIE SFEROIDY WYDŁUŻONEJ W JEDNORODNYM POLU ELEKTROSTATYCZNYM .....	31

6.1. Uwagi wstępne .....	31
6.2. Natężenie pola elektrycznego wywołane przez $E_0 \sin \gamma 1_z$ .....	32
6.3. Natężenie pola elektrycznego wywołane przez $E_0 \cos \gamma 1_x$ .....	35
6.4. Zmiana energii pola elektrostatycznego ziarniaka jednorodnego .....	39
6.5. Moment działający na ziarniak jednorodny umieszczony w polu elektrostatycznym .....	47
<b>7. ZACHOWANIE SIĘ ZIARNIAKA O BUDOWIE WARSTWOWEJ W POLU ELEKTROSTATYCZNYM .....</b>	<b>52</b>
7.1. Natężenie pola elektrycznego wywołane przez $E_0 \sin \gamma 1_z$ .....	52
7.2. Natężenie pola elektrycznego wywołane przez $E_0 \cos \gamma 1_x$ .....	58
7.3. Transformacja wektorów natężenia pola .....	63
7.4. Zmiana energii pola elektrostatycznego ziarniaka o budowie warstwowej.....	65
7.5. Moment działający na ziarniak o budowie warstwowej, umieszczony w polu elektrostatycznym .....	80
<b>8. UPROSZCZONE METODY OBLICZANIA ENERGII I MOMENTU ORIENTACJI DLA ZIARNIAKA W JEDNORODNYM POLU ELEKTROSTATYCZNYM .....</b>	<b>89</b>
8.1. Dielektryczna przenikalność zastępcza .....	90
8.1.1. Kryterium równości zmian energii .....	90
8.1.2. Kryterium równości momentów .....	92
8.1.3. Kryterium proporcjonalności .....	93
8.2. Zależność energii i momentu orientacji od sposobu obliczania dielektrycznej przenikalności zastępczej .....	94
<b>9. WYNIKI BADAŃ LABORATORYJNYCH .....</b>	<b>99</b>
9.1. Zasada pomiaru przenikalności dielektrycznej .....	99
9.2. Stanowisko pomiarowe .....	102
9.3. Przykład pomiarowy .....	103
<b>10. PODSUMOWANIE .....</b>	<b>109</b>
<b>11. PIŚMIENNICTWO .....</b>	<b>111</b>
<b>12. STRESZCZENIE .....</b>	<b>118</b>
<b>13. SUMMARY .....</b>	<b>119</b>

## Przedmowa do serii wydawniczej Leonardo da Vinci

Istotnym sektorem gospodarki regionu środkowo-wschodniej Polski jest sektor agro-spożywczy i związany z nim przemysł przetwórstwa rolniczego. Dlatego wiele działań naukowych i edukacyjnych związanych z zagadnieniami znajdującymi zastosowanie w tych dziedzinach jest podejmowanych w takich ośrodkach akademickich: jak Politechnika Lubelska oraz Instytut Agrofizyki PAN w Lublinie.

Znaczna liczba ich absolwentów znajduje zatrudnienie w zakładach przemysłowych tego regionu, zarówno w zakładach przetwórstwa rolnego oraz w jednostkach badawczo-rozwojowych wielu instytucji m.in. u partnerów w projekcie Leonardo da Vinci jakimi są Elektromontaż Lublin S.A. oraz PZL Świdnik S.A. Wielu absolwentów posiadających wykształcenie w zakresie elektrotechniki współuczestniczy często w realizacji zadań badawczych, projektowych i produkcyjnych ukierunkowanych na potrzeby regionu. Poszczególne pozycje serii wydawniczej mają na celu nie tylko prezentację wyników badań, ale także mają stanowić materiał źródłowy dla inżynierów elektryków zatrudnionych w regionie i zawodowo zainteresowanych tą tematyką. Natomiast, dla uczących się na poziomie akademickiego kształcenia zawodowego w dziedzinie elektrotechniki, wydawnictwa te mogą stanowić przykład opisu praktycznej realizacji procesu rozwiązywania trudnych problemów w szeroko rozumianej dziedzinie zastosowań elektrotechniki w wybranych przez twórców projektu zagadnieniach.

W skład serii wydawniczej wchodzi następujące tytuły:

1. Horyński M.: *Wpływ pola elektrostatycznego na właściwości elektryczne ziarna zbóż.*
2. Horyński M., Oleszek M.: *Praktyki zawodowe studentów Wydziału Elektrycznego Politechniki Lubelskiej w Elektromontaż S.A. w Lublinie.*
3. Pietrzyk W.: *Modele ziarniaków zbóż stosowane w analizie elektrodynamicznej*
4. Pietrzyk W., Grundas S., Horyński M., Sumorek A., Ścibisz M., Walusiak S.: *Uzwojenia bifilarne do odpylania w przemyśle rolno-spożywcym.*
5. Sumorek A.: *Wpływ pola elektrycznego na konwekcyjne suszenia ziarna zbóż.*
6. Walusiak S., Krygier A.: *Praktyki zawodowe studentów wydziału Elektrycznego Politechniki Lubelskiej w PZL Świdnik.*
7. Wójcicka-Migasiuk D.: *Zastosowanie metody potencjałów węzłowych do analizy i projektowania instalacji słonecznych ciepłej wody.*

## Preface for Leonardo da Vinci editorial series

Agri - food production and processing industry is most important sector in the central - eastern region of Poland. That is why many educational and scientific activities related to the problems applied in these sectors of industry is taken up in such academic centers as Lublin Technical University and Institute of Agrophysics Polish Science Academy in Lublin.

Many graduates from the regional tertiary vocational education institutes are employed also at Leonardo da Vinci project partners i.e.: Elektromontaż Lublin S.A. and PZL Świdnik S.A., in food processing companies and in Research & Development Units in many institutes and companies. Many graduates educated in electrical engineering often co-operate in realisation of research, design and production tasks directed towards the local needs.

Particular items in this editorial series are aimed not only at the presentation of test results but also can form the reference basis for electric engineers employed in the region who are professionally interested in this field. Nevertheless, students at the level of tertiary vocational training in electrical engineering can take advantage from the described examples of practical processes of solution to difficult problems in widely understood field of electrical engineering applications in areas selected by the authors of this project entitled "*Forging development in the system of students' practical training in electrical engineering sector in the aspect of qualification needs*".

Leonardo da Vinci editorial series contains the following titles (in Polish):

1. Horyński M.: *The influence of electrostatic field on electric properties of grain.*
2. Horyński M., Oleszek M.: *Vocational practical training for students from the Faculty of Electrical Engineering, Lublin Technical University at Elektromontaż S.A. in Lublin.*
3. Pietrzyk W.: *Grain models in electrodynamic analysis.*
4. Pietrzyk W., Grundas S., Horyński M., Sumorek A., Ścibisz M., Walusiak S.: *Bifilar windings to dust control in agri-food industry.*
5. Sumorek A.: *The influence of electric field on convective drying of grain.*
6. Walusiak S., Krygier A.: *Vocational practical training for students from the Faculty of Electrical Engineering, Lublin Technical University at PZL Świdnik S.A.*
7. Wójcicka-Migasiuk D.: *The application of node potential method for the analysis and design of solar hot water systems.*

## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$a$	- odległość od ogniska
$A$	- praca
$a, b, c$	- grubość, szerokość i długość ziarniaka (sferoidy)
$A, B, C, D, F$	- stałe dowolne
$B_w$	- współczynnik sferyczności ziarniaka
$D$	- wektor indukcji elektrycznej
$E$	- wektor natężenia pola elektrycznego
$F$	- siła
$G$	- objętość
$g_{ii}$	- współczynnik metryki
$K_e$	- funkcja uwzględniająca ilościowe zmniejszenie energii w objętości zajętej przez sferoidę o jednostkowej objętości
$m, n$	- liczby całkowite, wskaźniki kolejności sumowania
$M$	- moment obrotowy
$p, q$	- liczby całkowite
$P_n(\mu)$	- funkcja Legendre'a pierwszego rodzaju
$P_n^m(\mu)$	- funkcja Legendre'a stowarzyszona pierwszego rodzaju
$Q_n(\mu)$	- funkcja Legendre'a drugiego rodzaju
$Q_n^m(\mu)$	- funkcja Legendre'a stowarzyszona drugiego rodzaju
$U$	- napięcie
$V$	- potencjał skalarny elektryczny
$x, y, z$	- współrzędne prostokątne
$\gamma$	- kąt
$\epsilon$	- przenikalność dielektryczna
$\epsilon_0$	- przenikalność dielektryczna próżni ( $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$ F/m)



$$\epsilon_w = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

- przenikalność dielektryczna względna

$\eta, \theta, \psi$

- współrzędne sferoidy wydłużonej

$\rho$

- gęstość ładunku elektrycznego

$\Phi$

- funkcja uwzględniająca wpływ sferyczności i względnej przenikalności ziarniaka na wielkość momentu obrotowego nań działającego

$\nabla^2$

- laplasjan skalarny

I, II

- indeksy oznaczające rozwiązania i stałe związane odpowiednio ze składową  $E_0 \sin \gamma_1$  lub ze składową

$$E_0 \cos \gamma_1,$$

## 1. WSTĘP I CEL PRACY

Spośród wielu sposobów bezpośredniego wykorzystania energii elektrycznej w procesach technologicznych produkcji rolniczej takich jak np.: elektrodowe ogrzewanie wody, elektrostatyczne odpylanie w mieszalnicach pasz i młynach, dielektryczne suszenie zboża z jednoczesną dezynsekcją, dielektryczna pasteryzacja przetworów owocowych, dielektryczne suszenie drewna itp., na uwagę zasługuje zastosowanie energii pola elektrycznego w procesie czyszczenia i sortowania nasion. Procesom czyszczenia i sortowania nasion w polu elektrycznym poświęcono wiele prac, szczególnie w ostatnich latach [1, 5, 7, 8, 10, 16, 20, 22, 31, 70, 73 ÷ 75, 91 ÷ 94, 96 ÷ 101, 105, 106].

Pierwszą publikacją, która objęła jednocześnie wyniki badań teoretycznych i laboratoryjnych oraz zawierała wskazówki dotyczące projektowania elektrostatycznych maszyn sortująco – czyszczących, jest praca zbiorowa pod red.: A.M. Basowa „Electric devices for grain cleaning” [2]. W tej pracy autor opierając się na wynikach amerykańskiego fizyka J. A. Stratton’a [85] dotyczących obliczenia rozkładu pola elektrycznego wewnątrz elipsoidy wykonanej z jednorodnego dielektryka i wprowadzonej do jednorodnego pola, potraktował również ziarniak jako sferoidę jednorodną.

Wszystkie dotychczasowe prace dotyczące analizy sił działających na ziarno umieszczone w jednorodnym polu elektrostatycznym bazują bezpośrednio na wynikach uzyskanych we wspomnianych pracach obydwóch autorów [12, 31, 72, 91, 95]. Podstawowym mankamentem tak przeprowadzonej analizy jest przyjęcie jednorodnej struktury ziarniaka. W rzeczywistości ziarno ma strukturę niejednorodną [5, 38, 67, 83, 98]. Rozkład pola elektrycznego w takich strukturach charakteryzuje się dużą złożonością i jego analiza jest trudna od strony matematycznej. Dlatego też w praktyce wykorzystuje się przybliżone metody oparte na aproksymacji struktury warstwowej – jednolitą (jednorodną) strukturą izotropową.

Taka aproksymacja według W.N. Ostrejki [53] jest dotychczas jedyną efektywną metodą otrzymania analitycznych algorytmów obliczeniowych pól w środowiskach o złożonych granicach rozdziału obszarów. Jest ona powszechnie stosowana przy obliczeniach konstrukcyjnych maszyn i urządzeń elektrycznych. Jednak rezultaty osiągnięte na tej drodze są ciągle dalekie od oczekiwań. Przykładowo, pomiary przenikalności elektrycznej ziarna owsa, przeprowadzone przez W.N. Szmigiela [2] w oparciu o wyniki otrzymane przez Stratton’a [85]

dawały wartość dążącą do nieskończoności. Wiadomo tymczasem, że przenikalność względna materiałów pochodzenia organicznego nie przekracza wartości kilkunastu.

Celem pracy jest więc:

- otrzymanie efektywnych algorytmów obliczeniowych rozkładu pola w jednorodnym jak i w wielowarstwowym modelu ziarna;
- zbadanie wpływu warstwowej struktury ziarniaków i ich wymiarów geometrycznych na moment orientacji działający na nie w polu elektrostatycznym;
- wykazanie celowości wykorzystania wyników analizy rozkładu pola w ziarniaku do praktycznych pomiarów ich przenikalności dielektrycznej metodą Szmigiela.

Stosowane w dotychczasowych pracach modele ziarna i problemy teoretycznej analizy jego pola przedstawiono w rozdziale trzecim. Analiza tych modeli i stosowanych metod obliczeniowych pozwoliła sformułować szereg problemów, których rozwiązanie podano w kolejnych rozdziałach.

W rozdziale piątym sformułowano założenia idealizujące, przy których przeprowadzono całość obliczeń zawartych w rozdziale szóstym, siódmym i ósmym. Istotną nowością w stosunku do znanych prac [1, 2, 11, 74, 75, 83, 85, 91, 106] jest przyjęcie warstwowej struktury ziarna i zastosowanie do obliczeń układu współrzędnych sferoidy wydłużonej. Zastosowanie tego modelu pozwala analizować właściwości ziarna o zmiennym kształcie, od kulistego do cienkiego pręta o skończonej długości. Ma to duże znaczenie, szczególnie przy aplikacji otrzymanych wyników do pomiarów przenikalności elektrycznej pojedynczego ziarna (p. rozdz. 9). Oprócz tego, w obliczeniach można dowolnie dobierać stosunek grubości poszczególnych warstw i dowolnie zmieniać ich przenikalność dielektryczną.

W rozdziale szóstym wyznaczono rozkład pola w ziarnie o strukturze jednorodnej oraz wyznaczono moment działający nań w jednorodnym polu elektrostatycznym. Otrzymane wyniki pozwoliły stwierdzić, że zmniejszające dokładność uproszczenia przyjęte w [2], a umożliwiające dzięki temu wykorzystanie zależności otrzymanych przez Stratton'a [85], spowodowały w [2] wzrost o 8% wielkości obliczonej energii i momentu.

W rozdziale siódmym przeprowadzono analizę rozkładu pola i obliczono moment dla ziarna o strukturze niejednorodnej - warstwowej. W wyniku stosunkowo skomplikowanych obliczeń otrzymano zależności możliwe do praktycznego wykorzystania jedynie z pomocą maszyny cyfrowej.

W rozdziale ósmym zademonstrowano uproszczoną metodę wyznaczania sił działających na ziarno w polu elektrycznym. Pozwala ona przy uwzględnieniu rzeczywistej – warstwowej struktury ziarna, uniknąć skomplikowanej procedury obliczeniowej, opracowanej w rozdziale siódmym, przy niewielkim stosunkowo obniżeniu dokładności.

Rozdział dziewiąty jest ilustracją praktycznego wykorzystania uzyskanych wyników do pomiaru przenikalności dielektrycznej pojedynczego ziarna. W czasie eksperymentu zmierzono przenikalność dielektryczną metaplexu. Względny błąd pomiarowy wyniósł – 4,03%, co przy tego typu pomiarach jest wielkością niewielką.

Zasadniczym rezultatem przedstawionej monografii są nie tylko algorytmy obliczeniowe rozkładu pola w ośrodku wielowarstwowym ziarna czy też sił nań działających i możliwości wykorzystania tych wyników do dokładniejszych pomiarów przenikalności dielektrycznej ale wskazanie na realną możliwość prowadzenia analizy matematycznej zjawisk w jego złożonej strukturze. Uwzględnienie rzeczywistej struktury warstwowej ziarna odkrywa realne możliwości sformalizowanego opisu szeregu niewyjaśnionych dotąd zjawisk i procesów w ziarnie, które także zachodzą w tego typu strukturach zbudowanych sztucznie przez człowieka np. zblachowany obwód magnetyczny, uzwojenie foliowe itp. [53], pracujących w zmiennym polu elektromagnetycznym.

Należy sądzić, że analogiczna sytuacja występuje w procesie suszenia dielektrycznego, kiedy to ziarno znajduje się w obszarze szybkozmiennego pola elektrycznego.

Przedstawiona praca omawia jedynie problemy związane z zachowaniem się ziarna w polu elektrostatycznym co nie wyczerpuje całego zagadnienia. Zastosowanie współrzędnych sferoidy wydłużonej umożliwiło analizę struktury warstwowej i pozwoliło na zmniejszenie błędu przy pomiarach przenikalności dielektrycznej metodą Szmigiela. Sprawa oszacowania błędu w całym rzeczywistym zakresie zmienności tego parametru wymaga jednak dalszych badań. Te badania muszą być ponadto poprzedzone dokładnym rozpoznaniem i usystematyzowaniem właściwości elektrycznych nasion.

## 2. BUDOWA ZIARNIAKA I JEGO WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNO – ELEKTRYCZNE

### 2.1. Budowa ziarniaka

Owocem traw, w tym i zbóż, jest sucha jednonasienna niełupka – ziarniak nazywany zwykle przez rolników ziarnem. Składa się on z zarodka, bielma i okrywy owocowo – nasiennej. Budowę ziarniaka przedstawia Rys. 1.

Okrywa owocowo – nasienna ma strukturę wielowarstwową i zbudowana jest ze zdrewniałej owocni, z łupiny nasiennej i resztek ośrodka – obielma. Ściśle z okrywą związana jest zewnętrzna warstwa bielma tzw. warstwa aleuronowa, wyraźnie wyodrębniona warstwa komórek gromadzących białkowe materiały zapasowe w postaci ziarn aleuronowych. Ściany ich są grube i utworzone z celulozy.

U jęczmienia i owsa występuje więcej warstw aleuronowych niż u innych zbóż.

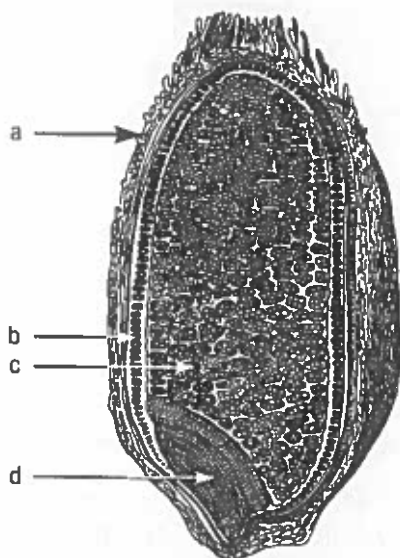
Bielmo wypełnia wnętrze ziarniaka i stanowi 70+80 % masy ziarna. Komórki bielma wypełnione są polisacharydowymi materiałami zapasowymi w postaci pojedynczych, koncentrycznych ziarn skrobi. W środkowych partiach, gdzie ziaren skrobi jest najwięcej, jądra komórek bielma są ściśnięte, zniekształcone i martwe. W partiach bliskich powierzchni (bielma) oraz w ostatniej warstwie tej tkanki – w warstwie aleuronowej jądra pozostają normalne.

Ponieważ poszczególne warstwy ziarniaka zbudowane są z odmiennych materiałów, więc w jego obrębie występują różnice ciężaru właściwego poszczególnych jego części (p. Tabela 1):

Tabela 1. Masa właściwa (g/ml) ziarna i jego części [24]

Table 1. Specific mass (g/ml) of wheat grains and their elements [24]

Pszenica	Masa właściwa			
	ziarno	bielmo	zarodek	okrywa
Ozima	1,37	1,47	1,28	1,11
Jara miękka	1,37	1,47	1,29	1,07
Jara twarda	1,37	1,38	1,29	1,11



**Rys. 1.** Pólschematyczny przekrój podłużny ziarniaka pszenicy [38, 67]: a – okrywa owocowo-nasienna, b – warstwa aleuronowa bielma, c – komórki bielma wypełnione ziarnkami skrobi, d – zarodek.

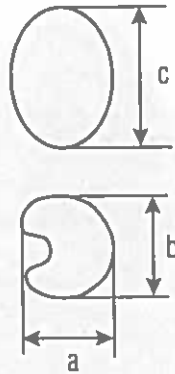
**Fig. 1.** Semi-diagrammatic longitudinal section of a wheat grain [38, 67]: a- seed fruit cover, b- endosperm aleuron layer, c- endosperm cells filled with starch granules, d- a germ.

Ziarna pszenicy szklistej o zwartej budowie wykazują większą masę właściwą niż ziarna mączyste o luźniejszej budowie. W nasionach pszenicy jarej miękkiej powietrze zajmuje 10÷13 %, a w pszenicy twardej 8÷9 % objętości.

Nasiona oplewione (owies) mają mniejszą masę właściwą niż nieoplewione, gdyż plewka zbudowana jest z celulozy i zawiera duże przestrzenie powietrzne. Zawartość powietrza sięga w nich nawet do 30% objętości.

Różnice gęstości poszczególnych gatunków nasion są m.in. przyczyną różnic przenikalności dielektrycznej odmiennych gatunków. Z kolei różny skład chemiczny poszczególnych warstw powoduje również różnice w ich przenikalności jak i w masie właściwej tj. gęstości. Np.: gęstość skrobi wynosi  $1,48\div 1,61 \text{ g/cm}^3$ , białka 1,34, błonnika – 1,30, tłuszczu –  $0,924\div 0,928 \text{ g/cm}^3$  [4, 8, 25, 26, 34].

Kształty nasion zbóż (pszenica, jęczmień, żyto, owies) powszechnie aproksymuje się wydłużoną sferoidą [2, 34, 84]. Rzeczywisty kształt ziarniaka przedstawia Rys. 2.



Rys. 2. Podstawowe wymiary nasienia [84]: a – grubość, b – szerokość, c – długość.  
 Fig. 2. Basic dimensions of a seed [84]: a - thickness, b - width, c – length.

Wielkość nasion zmienia się zależnie od warunków meteorologicznych danego roku i wykazuje zróżnicowanie między gatunkami i między odmianami zbóż. Przykładowo wymiary nasion podano w Tabelach 2 ÷ 4. [84].

Jak wynika z przytoczonych przykładów, jęczmień ma najbardziej płaskie ziarna, w porównaniu z innymi gatunkami zbóż. W przypadku żyta natomiast grubość niewiele się różni od szerokości.

Z Tabel tych wynika, że aproksymacja ziarna wydłużoną sferoidą jest najlepsza dla żyta.

Tabela 2. Wymiary nasienia pszenicy ozimej ze Stacji Doświadczalnej Oceny Odmian (SDOO) w Czesławicach ze zbiorów 1971r. [84]

Table 2. Dimensions of winter wheat grains from the test station in Czesławice [84]

Wymiar w [mm]	Odmiana	Eros	Eka Nowa	Dana
a		2,7	2,8	2,4
b		3,4	3,4	3,1
c		4,7 + 6,3	5,3 + 6,8	4,5 + 6,5

Tabela 3. Wymiary nasienia żyta ze SDOO w Czesławicach 1971 r. [84]

Table 3. Dimensions of rye grains from the test station in Czeslawice [84]

Wymiar w [mm]	Odmiana	Dańkowskie Złote	Dańkowskie Selekcyjne
a		2,4	2,3
b		2,5	2,5
c		6,4 + 6,8	6,2 + 8

Tabela 4. Wymiary nasienia jęczmienia jarego ze SDOO w Zadąbrowie 1971 r. [84]

Table 4. Dimensions of spring barley grains from the test station in Zadąbrowie [84]

Wymiar w [mm]	Odmiana	Dańkowskie Złote	Dańkowskie Selekcyjne
a		2,6	2,6
b		3,8	3,8
c		8,5 + 9,7	8,0

## 2. 2. Właściwości elektryczne ziarniaka

Nasiona roślin z punktu widzenia fizyki należą do grupy dielektryków o słabej polaryzowalności [2]. Ich budowa jest niejednorodna. Ponieważ dielektryki niejednorodne nie znajdowały dotychczas praktycznego zastosowania w elektrotechnice, dlatego też nie powstały znormalizowane metody pomiarowe, mające na celu jednoznaczne określenie ich parametrów elektrycznych. Z tych to powodów właściwości nasion jako dielektryków niejednorodnych, z technicznego punktu widzenia są mało poznane.

Dotychczas mierzone wielkości, określające elektryczne właściwości materiałów pochodzenia biologicznego (rezystancja, przewodność elektryczna, przenikalność dielektryczna, tangens kąta stratności itp.), dotyczą uśrednionych wartości masy nasion ewentualnie masy pojedynczego ziarna.

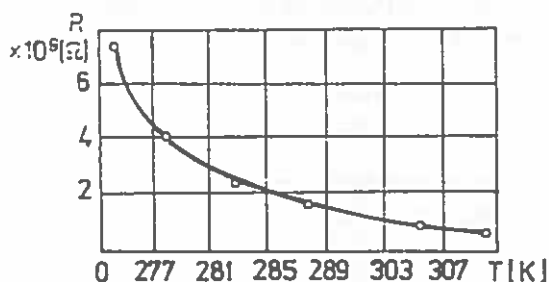


### 2.2.1. Rezystancja nasion

Rezystancja ziarna jest wielkością zależną od wielu czynników takich, jak temperatura, wilgotność, czy też odmiana.

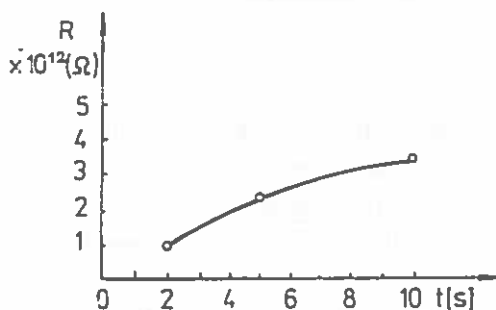
Wraz ze wzrostem temperatury rezystancja maleje, podobnie jak w ciałach będących na pograniczu dielektryków i półprzewodników (Rys. 3). To zjawisko tłumaczy się wzrostem ruchliwości jonów tworzących siatkę krystaliczną.

Rezystancja ziarna zależy od czasu działania nań pola elektrycznego [2, 4, 25, 26]. To zjawisko jest wywołane procesem polaryzacji, który dla różnych gatunków nasion trwa od kilku sekund do kilku minut (Rys. 4).



Rys. 3. Zależność rezystancji ziarna pszenicy od temperatury [2].

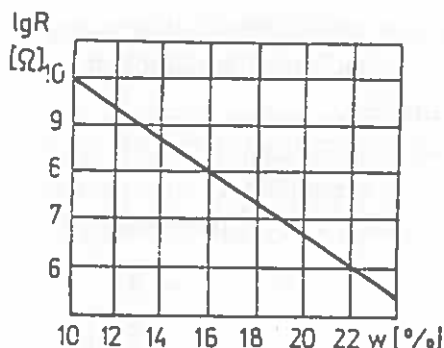
Fig. 3. Dependence of wheat grain resistance on temperature [2].



Rys. 4. Zależność rezystancji ziarna soi od czasu działania pola elektrycznego [10].

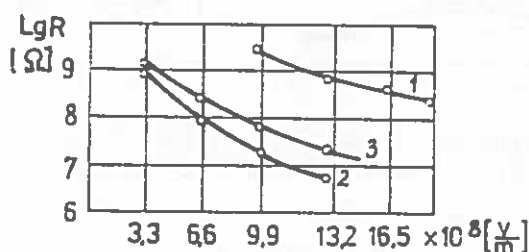
Fig. 4. Soya bean resistance during exposition to electric field [10].

Bardzo duży wpływ na rezystancje nasion wywiera wilgotność (Rys. 5). Wraz ze wzrostem wilgotności rezystancja maleje.



Rys. 5. Zależność rezystancji nasion od wilgotności [2].

Fig. 5. Dependence of grain resistance on moisture content [2].



Rys. 6. Wpływ natężenia pola elektrycznego na rezystancję ziarna pszenicy przy różnych wilgotnościach [2]: 1 – w = 12%; 2 – w = 18%; 3 – w = 15%.

Fig. 6. The influence of electric field intensity on wheat grain resistance at different moisture content [2]: 1 – w = 12%; 2 – w = 18%; 3 – w = 15%.

Interesująco wygląda wpływ natężenia pola elektrycznego na wartość rezystancji nasion (Rys. 6). Wraz ze wzrostem natężenia rezystancja maleje. Można to wytłumaczyć pojawianiem się w ziarnie, w miarę wzrostu natężenia pola, prądu elektrycznego. Wpływ ten zarysowuje się szczególnie ostro w nasionach o dużej wilgotności ( $w > 15\%$ ), kiedy nabierają one właściwości półprzewodników.

### 2.2.2. Przenikalność elektryczna nasion

Przenikalność elektryczna nasion  $\varepsilon$  jest wielkością zespoloną:

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'',$$

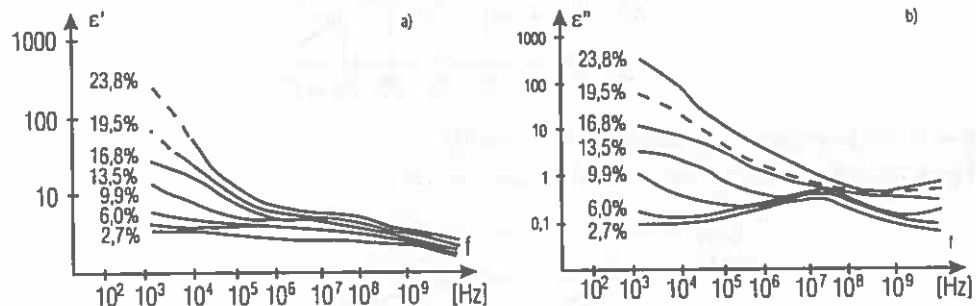
gdzie:

$\epsilon'$  - składowa rzeczywista przenikalności elektrycznej,

$\epsilon''$  - składowa urojona przenikalności elektrycznej,

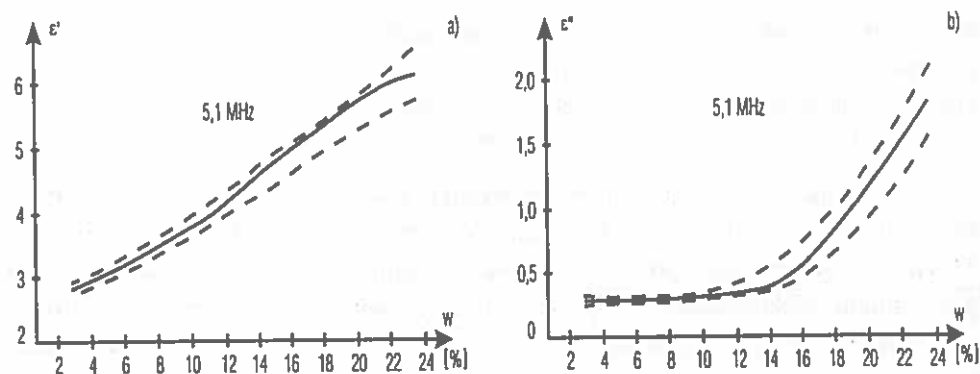
$j = \sqrt{-1}$  - jednostka urojona.

Składowa rzeczywista przenikalności bardzo silnie i niemalże liniowo zależy od wilgotności ziarna i częstotliwości pola elektrycznego (Rys.7a, 8a). Tak wyraźnej zależności nie obserwuje się przy składowej urojonej (Rys. 7b, 8b).



Rys. 7. Zależność względnej przenikalności elektrycznej pszenicy ozimej czerwonej od wilgotności  $w$  i częstotliwości  $f$  [45]: a – składowa rzeczywista  $\epsilon'$ ; b – składowa urojona  $\epsilon''$ .

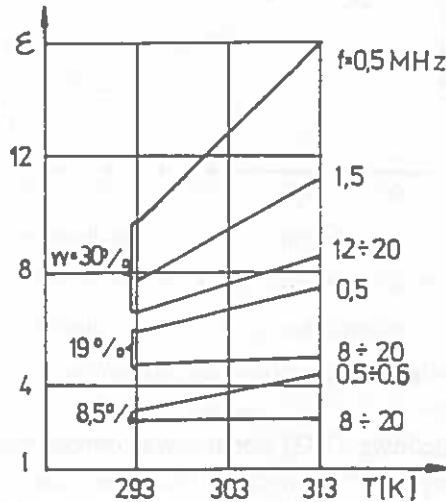
Fig. 7. The graph of relative electric permittivity vs. humidity and frequency  $f$  (winter read wheat) [45]: a - real component  $\epsilon'$ , b - imaginary component  $\epsilon''$ .



Rys. 8. Zależność przenikalności elektrycznej pszenicy ozimej czerwonej od wilgotności  $w$  przy stałej częstotliwości pola elektrycznego  $f = 5,1$  MHz [45]: a – składowa rzeczywista  $\epsilon'$ ; b – składowa urojona  $\epsilon''$ .

Fig. 8. The graph of relative electric permittivity vs. humidity at constant frequency  $f = 5.1$  MHz (winter read wheat) [45]: a - real component  $\epsilon'$ , b - imaginary component  $\epsilon''$ .

Wraz ze zwiększeniem temperatury, przenikalność elektryczna również wzrasta, przy czym nachylenie krzywych zmniejsza się ze wzrostem częstotliwości. W przypadku nasion suchych przenikalność elektryczna  $\epsilon$  prawie nie zależy od częstotliwości i temperatury (Rys. 9).



Rys. 9. Zależność  $\epsilon = f(T)$  dla nasion łubinu pastewnego o różnej wilgotności  $w$ , przy różnych częstotliwościach  $f$  [102].

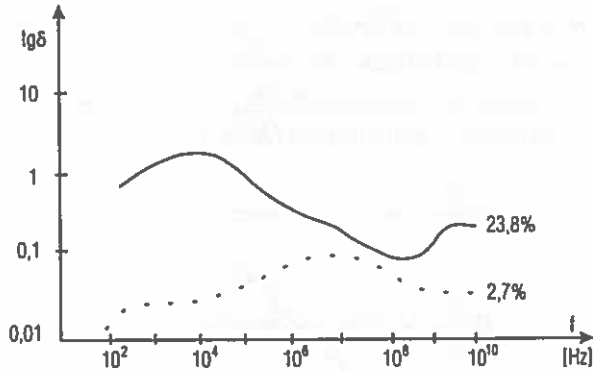
Fig. 9. The image of  $\epsilon = f(T)$  for fodder lupin beans of different moisture content at various frequency  $f$  [102].

Z przebiegu krzywych wynika, że przenikalność elektryczna w dużym stopniu zależy od wilgotności nasion i wraz z nią wzrasta.

### 2.2.3. Tangens kąta stratności nasion

Znajomość kąta stratności dielektrycznej nasion  $\text{tg} \delta$  jest konieczna przy projektowaniu dielektrycznych urządzeń suszarniczych.

Dokładne badania tej wielkości przeprowadzili Nelson i Stetson [45]. Wyniki ilustruje Rys. 10.

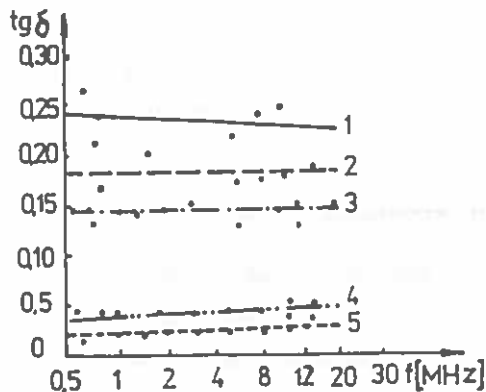


Rys. 10. Zależność  $\text{tg}\delta$  od częstotliwości  $f$  i wilgotności dla pszenicy, [45].

Fig. 10. The dependence of  $\text{tg}\delta$  on frequency  $f$  and humidity  $w$ ; wheat [45].

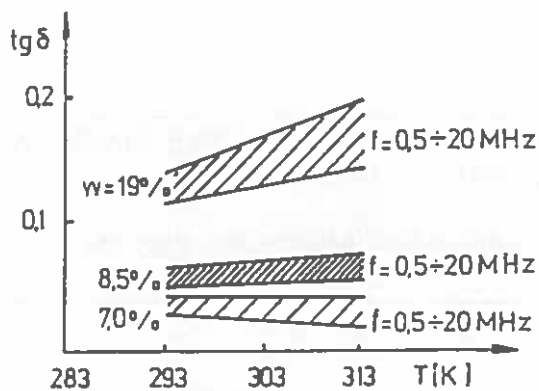
Jak widać,  $\text{tg}\delta$  w przypadku pszenicy w niewielkim stopniu zależy od częstotliwości. W badanym przedziale częstotliwości ( $10^2 \div 10^{10}$  Hz) waha się w granicach od 0,02 do 2.

Torosjan i Konochova [102] dodatkowo, oprócz pszenicy, przebadali łubin pastewny, groch, grykę i kukurydzę. Podobnie jak w [45] potwierdziła się niewielka zależność  $\text{tg}\delta$  od częstotliwości (Rys. 11). Większy wpływ na przebieg tego współczynnika wywiera wilgotność i temperatura (Rys. 12). Wraz ze wzrostem obydwu tych parametrów  $\text{tg}\delta$  również wzrasta.



Rys. 11. Zależność  $\text{tg}\delta$  od częstotliwości  $f$  dla nasion łubinu pastewnego przy temp.  $T = 293$  K (krzywe 1, 2, 3, 4, 5 odpowiadają kolejno wilgotnościom ziarna  $w = 35, 30, 18, 9, 7\%$  [102].

Fig 11. Dependence:  $\text{tg}\delta$  vs frequency for fodder lupin beans at temperature  $T = 293$  K (curves 1, 2, 3, 4, 5 for moisture content of grain  $w = 35, 30, 18, 9, 7\%$  respectively) [102].

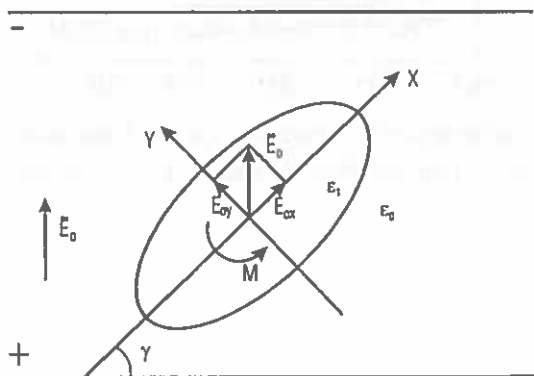


Rys. 12. Zależność  $\text{tg } \delta$  od temperatury i wilgotności  $w$  w nasion łubinu pastewnego [102].

Fig. 12. Dependence:  $\text{tg } \delta$  vs temperature and moisture content  $w$ , for fodder lupin beans [102].

### 3. UOGÓLNIONE ELEKTRYCZNE MODELE ZIARNIAKA I PROBLEMY TEORETYCZNEJ ANALIZY JEGO POLA

#### 3.1. Ziarniak jako jednorodna dielektryczna elipsoida



Rys. 13. Dielektryczna elipsoida obrotowa w jednorodnym polu elektrostatycznym [1, 59, 85].

Fig. 13. Dielectric ellipsoid of revolution in a uniform electrostatic field [1, 59, 85].

Model ziarniaka o budowie jednorodnej i kształcie elipsoidy oraz o właściwościach dielektryka przedstawia Rys. 13. Pole wewnątrz elipsoidy umieszczonej w jednorodnym polu elektrostatycznym wyznaczył J.A. Stratton [85], posługując się elipsoidalnym układem współrzędnych. Jako rozwiązanie opisujące natężenie pola otrzymał wyrażenie:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + \frac{abc}{16}(\varepsilon - 1) \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\left(\xi + \frac{a^2}{4}\right) R_\xi}} \quad (1)$$

gdzie:

$\mathbf{E}$  - natężenie pola wewnątrz dielektryka,

$\mathbf{E}_0$  - natężenie zewnętrznego pola wymuszającego,

$a, b, c$  - odpowiednio: grubość, szerokość i długość sferoidy,

$\varepsilon$  - względna przenikalność dielektryka,

$$R_{\xi} = \sqrt{\left(\xi + \frac{a^2}{4}\right)\left(\xi + \frac{b^2}{4}\right)\left(\xi + \frac{c^2}{4}\right)}, \quad (2)$$

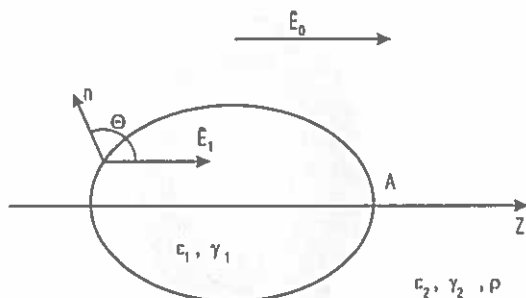
$\xi$  - współrzędna elipsoidy.

Całka w mianowniku wyrażenia (1) nie daje się analitycznie rozwiązać. W celu otrzymania rozwiązania Basow [2] wprowadził uproszczenia zastępując elipsoidę trójosiową elipsoidą dwuosiową.

Podstawowym mankamentem tak przeprowadzonej analizy jest przyjęcie jednorodnej struktury elipsoidy, gdy w rzeczywistości ziarniak ma strukturę warstwową. Uproszczony do tego stopnia model ziarna uniemożliwia np.: analizę działających w jego wnętrzu sił elektrostatycznych.

Mimo wspomnianych niedostatków, ten model i rozwiązania z nim związane są używane do dziś we wszystkich niemalże publikowanych pracach dotyczących analizy zachowania się ziarna w polu elektrycznym [2, 74, 75, 83, 91, 106].

### 3.2. Ziarniak jako jednorodna dielektryczna elipsoidalna o niezerowej przewodności



Rys. 14. Dielektryczna i przewodząca elipsoidalna w jednorodnym polu elektrostatycznym [11].

Fig. 14. Dielectric conducting ellipsoid in the uniform electrostatic field [11].

Model przedstawiony na Rys. 14 aczkolwiek nie uwzględnia rzeczywistej struktury ziarniaka, to uwzględnia obok przenikalności  $\epsilon_1$ , jego elektryczną przewodność skrośną  $\gamma_1$ , oraz odpowiednio przenikalność  $\epsilon_2$  i przewodność  $\gamma_2$  ośrodka, w którym jest on umieszczony. Ośrodek jest dodatkowo zjonizowany. Gęstość ładunków swobodnych wynosi  $\rho$ .

Autorzy [11] szukając zależności opisującej natężenie pola wewnątrz elipsoidy posługiwali się również elipsoidalnym układem współrzędnych. Z tych



też powodów napotkali przy rozwiązywaniu te same problemy matematyczne co Stratton [85]. Trudności te pokonali zastępując elipsoidę 3 – osiową elipsoidą 2 – osiową, oraz korzystając z tabelaryzacji całki [52].

### 3.3. Ziarniak jako dielektryczna sferoida o budowie warstwowej

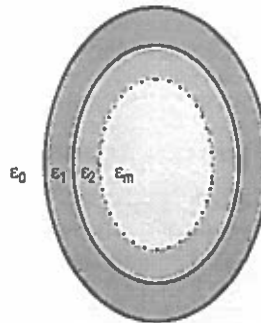
Żaden z modeli ziarniaka wykorzystywanych w dotychczasowych pracach analizujących zachowanie się ziarna w polu elektrycznym nie uwzględnia rzeczywistej – warstwowej budowy ziarniaka. Na niedostatki takich modeli, przedstawionych powyżej w p. 3.1 i 3.2, zwrócił uwagę W.T. Taruszkin w [98]. Autor tej publikacji pisze, że przenikalność każdej warstwy jest inna. wewnętrzne warstwy ziarna mają większą wilgotność i większą gęstość niż zewnętrzne, a więc i większą przenikalność:

$$\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_m,$$

gdzie:

$\epsilon_0$  - przenikalność elektryczna powietrza,

$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$  - przenikalność poszczególnych warstw ziarna.



Rys. 15. Ziarno jako dielektryczna sferoida o budowie warstwowej.

Fig. 15. Grain as a dielectric laminar spheroid.

Różnica w przenikalności elektrycznej różnych warstw jest m. in. przyczyną powstania w ziarnie umieszczonym w polu elektrycznym sił elektrostrykcyjnych, wywołujących w jego wnętrzu deformacje tzn. ściskanie lub rozciąganie poszczególnych warstw. Deformacja prowadzi do zmiany gęstości tych warstw, co zarazem wpływa na zmianę ich przenikalności elektrycznej.

Warstwowa budowa ziarna powoduje, że w jego wnętrzu pole elektryczne przestaje być jednorodne. Jak przyznaje W. I. Taruszkin, [98] obliczanie sił

działających na ziarno umieszczone w polu elektrycznym w funkcji przenikalności elektrycznej poszczególnych warstw jest zadaniem trudnym.

W celu zbadania wpływu budowy warstwowej ziarna na kształtowanie się sił w funkcji takich parametrów jak: przenikalność elektryczna różnych warstw i ich grubość, wydaje się, że wystarczy analizować model ziarna złożony jedynie z dwóch warstw. Pierwszą warstwę będzie stanowić okrywa wraz z warstwą aleuronową, a drugą – wewnątrz składające się z ziaren skrobi.

Ograniczając model do dwóch warstw uzyskuje się szansę otrzymania stosunkowo prostych zależności analitycznych, pozwalających na analizę wpływu poszczególnych czynników związanych z właściwościami ziarna (wilgotność, kształt, grubość warstw, ich przenikalność elektryczną itp.) na moment obrotowy.

## 4. SIŁY MECHANICZNE DZIAŁAJĄCE NA ZIARNIAK W JEDNORODNYM POLU ELEKTRYCZNYM

Na nasiona (dielektryki stałe) umieszczone w polu elektrycznym mogą działać dwa rodzaje sił: siły ponderomotoryczne i siły elektrostrykcyjne [19, 50, 86, 87, 90, 98, 105]. Siły ponderomotoryczne wywołane ładunkami swobodnymi ziarna lub ładunkami przesunięcia, powstałymi na skutek polaryzacji, starają się wprawić ziarniak w ruch.

Siły elektrostrykcyjne są wynikiem oddziaływania ładunków pojawiających się na granicach poszczególnych warstw ziarna. Efektem tych sił są naprężenia ściskające i rozciągające usiłujące zdeformować ziarno.

### 4.1. Siły ponderomotoryczne

#### 4.1.1. Siły wywołane ładunkiem swobodnym ziarniaka

Na ziarno naelektryzowane (w zjonizowanym polu elektrycznym np. podczas wyładowaniu koronowego lub „przez tarcie”) i umieszczone w polu elektrycznym działa siła, którą można wyznaczyć ze wzoru [50]:

$$F_e = \int q \mathbf{E} dq, \quad (3)$$

gdzie:

$\mathbf{E}$  - natężenie zewnętrznego pola elektrycznego w miejscu położenia ładunku  $dq$ , bez składowej wywołanej tym ładunkiem,

$q$  - ładunek zgromadzony przez ziarno.

Wielkość siły  $F_e$  zależy od natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  i od ilości ładunku elektrycznego zgromadzonego przez ziarno. Ilość ładunku zależy m. in. od sposobu elektryzowania oraz elektrycznych właściwości ziarna, takich jak przenikalność dielektryczna, przewodność, wilgotność.

Ten rodzaj sił został wykorzystany w czyszczalniach jonizacyjnych.

#### 4.1.2. Siły wywołane ładunkiem przesunięcia

Nasiona należą do dielektryków, których molekuly składają się z symetrycznie rozłożonych ładunków [98]. Przyłożone zewnętrzne pole

elektryczne powoduje, że molekuly polaryzują się, powstają ładunki przesunięcia i wytwarzają pole o znaku przeciwnym do przyłożonego. W każdej cząstce powstaje indukowany moment dipolowy [19]. Oddziaływanie ładunków przesunięcia z zewnętrznym polem elektrycznym prowadzi do pojawienia się siły  $F_p$  [104]:

$$F_p = -\frac{1}{2} \int_0^V \text{grad } \epsilon E^2 dV = -\frac{1}{2} \int_0^V (\epsilon \text{grad } E^2 + E^2 \text{grad } \epsilon) dV, \quad (4)$$

gdzie:

$\text{grad } \epsilon$  - gradient uwzględniający zmienność przenikalności dielektrycznej ziarna,

$\text{grad } E^2$  - gradient uwzględniający niejednorodność pola elektrycznego w ziarnie,

$dV$  - element objętości ziarna,

$\epsilon$  - absolutna przenikalność dielektryczna ziarna.

Z analizy wzorów (4) wynika, że siła  $F_p$  zależy nie tylko od natężenia pola elektrycznego ale i od jego niejednorodności.

Siła  $F_p$  stara się przesunąć ziarno do obszaru o większym natężeniu pola elektrycznego. To zjawisko zostało wykorzystane w dielektrycznych urządzeniach separujących z uzwojeniem bifilarnym, które jest źródłem pola niejednorodnego [31, 32].

Jeśli ziarno jest umieszczone w jednorodnym polu elektrycznym, to oddziaływanie ładunków przesunięcia z zewnętrznym polem elektrycznym daje w efekcie moment obrotowy usiłujący obrócić ziarno [50]:

$$M = p \times E, \quad (5)$$

gdzie:

$p$  - elektryczny moment dipolowy,

$$p = \int_V P dV, \quad (6)$$

$P$  - polaryzowalność ziarniaka,

$E$  - natężenie zewnętrznego pola elektrycznego,

$V$  - objętość ziarniaka.

Wielkość  $P$  zależy od natężenia pola zewnętrznego, oraz od budowy biologicznej i składu chemicznego ziarna.

Zjawisko orientowania się nasion w polu elektrycznym pod wpływem momentu obrotowego zostało wykorzystane do ich selekcji [7]. Zagadnieniom obliczania wielkości tego momentu jest poświęcona dalsza część pracy.

#### 4.2. Siły elektrostrykcyjne

Pojawiające się siły na granicach poszczególnych warstw ziarniaka, które są wynikiem wzajemnego oddziaływania pola elektrycznego i ładunków indukowanych na tychże granicach starają się przesunąć części środowiska względem siebie. Prowadzi to do napięć elastycznych w środowisku (ściskanie lub rozciąganie warstw) i może powodować deformacje wewnątrz ziarniaka.

W nienaładowanym środowisku siłę elektrostrykcyjną można wyznaczyć z wyrażenia [50, 98]:

$$F_s = \frac{1}{2} \int_V \text{grad} \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \right) dV, \quad (7)$$

gdzie:

$\tau$  - gęstość ziarniaka,  $\text{kg/m}^3$ ,

$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau}$  - zmiana przenikalności ziarniaka spowodowana zmianą gęstości  $\tau$  podczas deformacji.

Ściskanie lub rozciąganie warstw ziarniaka może prowadzić do zmiany zdolności zatrzymywania wilgoci. Można więc wykorzystać pole elektryczne do zmniejszenia ilości energii traconej w procesie suszenia ziarna.

## 5. ZAŁOŻENIA PODSTAWOWE

### 5.1. Założenia idealizujące

Dokładna analiza zachowania się ziarniaka w polu elektrycznym powinna uwzględnić:

- rzeczywisty kształt ziarniaka,
- rzeczywistą złożoność budowy ziarniaka,
- nieliniowy charakter właściwości elektrycznych ziarniaka, zależny np. od natężenia pola elektrycznego, czasu itp.

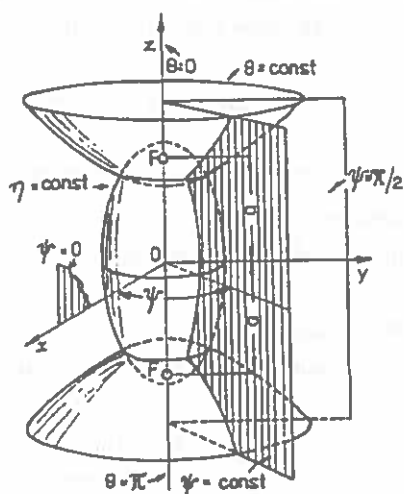
Analityczne obliczenie pola elektrycznego wewnątrz i na zewnątrz ziarniaka z uwzględnieniem wszystkich czynników jest zadaniem trudnym. Dlatego też, podobnie jak w wielu innych pracach [2, 12, 85], przyjęto założenia upraszczające analizę a jednocześnie nie zniekształcające fizycznej strony zjawisk. Założono, że:

- środowisko, w którym umieszczono ziarniak jest jednorodne i izotropowe (powietrze),
- w rozpatrywanym obszarze brak jest ładunków przestrzennych,  $\rho = 0$  (powietrze niezjonizowane),
- każda z warstw ziarniaka jest ośrodkiem izotropowym i jednorodnym (wtedy zaindukowana polaryzacja  $\mathbf{P}$  jest równoległa do  $\mathbf{E}$ ,  $\epsilon$  nie zależy od położenia ziarniaka względem pola),
- odpowiedź środowiska (ziarniaka) na przyłożone pole elektryczne jest liniowa,
- przy zmianie położenia ziarniaka w polu elektrycznym, energia pola elektrycznego zamienia się całkowicie w pracę mechaniczną. Zakłada się przy tym, że ruch ziarniaka odbywa się bardzo wolno i dlatego nie powstają w nim straty związane ze zmianą pola,
- przewodność elektryczna ziarniaka jest równa zero (ziarno jest dielektrykiem),
- wstawienie w obszar pola dodatkowego dielektryka nie zmienia gęstości ładunku źródeł pola.

## 5.2. Wybór układu współrzędnych

Analityczne rozwiązanie metodą rozdzielania zmiennych, równania różniczkowego opisującego pole jest możliwe tylko wtedy, gdy można znaleźć układ współrzędnych, w którym wszystkie granice środowisk są powierzchniami współrzędnych. Rzeczywisty kształt ziarniaka zbóż jest zbliżony kształtem do dwuosiowej elipsoidy [2, 34, 84]. Jego wewnętrzne warstwy są również ułożone symetrycznie (p. Rys. 1). Symetria ziarniaka sugeruje więc rozwiązywanie zagadnienia w układzie współrzędnych sferoidy wydłużonej [41, 42]. W tym układzie możliwe jest rozdzielanie zmiennych w równaniu Laplace'a i Helmholtza.

Analizowany kształt ziarniaka w powyższych współrzędnych może się zmieniać od kulistego do cienkiego pręta o skończonej długości. W tych granicach mieści się kształt nasion większości traw (w tym zbóż) oraz chwastów. Potencjał może być określony na powierzchni sferoidy jak również na dwóch hiperboloidach, dzięki czemu można rozpatrywać przypadki od płaszczyzn do cienkich prętów.



Rys. 16. Współrzędne sferoidy wydłużonej [41, 42].

Fig. 16. Coordinates of a prolate spheroid [41, 42].

Współrzędne sferoidy wydłużonej  $(\eta, \theta, \psi)$  są związane ze współrzędnymi prostokątnymi za pomocą wzorów [41]:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \operatorname{sh} \eta \sin \theta \cos \psi, \\ y &= a \operatorname{sh} \eta \sin \theta \sin \psi, \\ z &= a \operatorname{ch} \eta \cos \theta. \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

Powierzchnie o wartościach  $\eta = \text{const}$  są sferoidami wydłużonymi i spełniają równanie:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (8a)$$

gdzie:

$$b = a \operatorname{sh} \eta, \quad c = a \operatorname{ch} \eta.$$

Dla  $\eta \rightarrow 0$  sferoida przyjmuje kształt odcinka o długości  $2a$  pokrywającego się z osią  $z$ . Gdy  $\eta \rightarrow \infty$ , sferoida staje się kulą ( $\operatorname{sh} \eta = \operatorname{ch} \eta$ ).

Współczynniki metryki dla współrzędnych sferoidy wydłużonej mają postać:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = a^2 (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta), \\ g_{33} &= a^2 \operatorname{sh}^2 \eta \sin^2 \theta, \\ \sqrt{g} &= a^3 \operatorname{sh} \eta \sin \theta (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

### 5.3. Wybór metody analizy pola

Analogicznie do struktury ziarniaka, warstwową budowę posiadają również obwody magnetyczne maszyn elektrycznych. Dla tych obwodów opracowano szereg metod analizy pola uwzględniających strukturę warstwową.

W większości przypadków są to metody oparte na aproksymacji (ekwiwalentnej równoważności) struktury warstwowej – strukturą jednorodną [53]. Taka aproksymacja jest obecnie rzeczywiście jedyną efektywną metodą otrzymania analitycznych algorytmów obliczeniowych pól, w obszarach o złożonych granicach i o różnych właściwościach elektrycznych. Te metody, mimo powszechnego stosowania, prowadzą, jak dowodzi W. N. Ostrejko w swojej monografii [53], do wyników obarczonych dużymi błędami.

Oprócz tego, modelowanie struktury warstwowej – jednorodną, gubi informację o załamaniu linii pola elektrycznego na granicach obszarów. W przypadku ziarniaka uniemożliwia to analizę szeregu zjawisk takich jak: proces ładowania (ładunkiem elektrycznym) i rozładowywania lub siły elektrostrykcyjne.



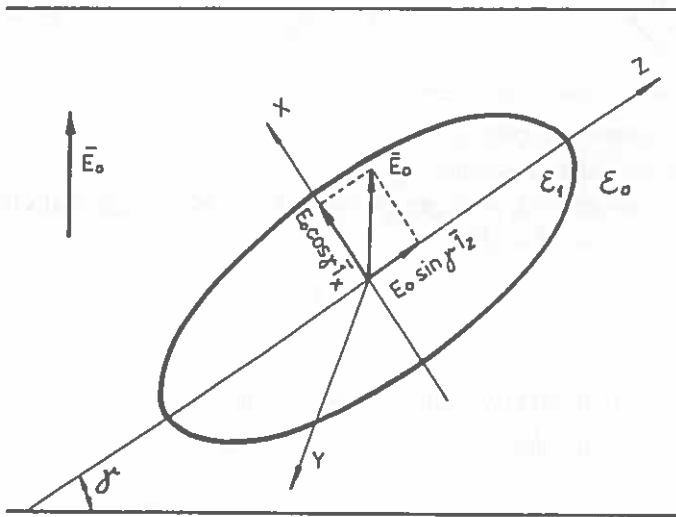
Jako antidotum na niedoskonałości znanych dotychczas metod, W. N. Ostrejko proponuje zastosowanie tzw. współrzędnych lokalnych [53]. Niestety, ta metoda może być stosowana jedynie w obszarach o kształtach prostokątnych i cylindrycznych.

Do najlepszych metod analitycznych jest zaliczana metoda rozdzielania zmiennych [41]. Ponieważ w układzie współrzędnych sferoidy wydłużonej, można rozdzielić zmienne zarówno w równaniu Laplace'a jak i Helmholtz'a, więc tę metodę przyjęto w niniejszej pracy. Stałe całkowanie występujące w otrzymanych rozwiązaniach dotyczących rozkładu potencjału w poszczególnych obszarach jednorodnych wyznaczono na drodze „zszywania” funkcji (będących rozwiązaniami) korzystając z warunków ciągłości pola na granicach obszarów.

## 6. ZACHOWANIE SIĘ ZIARNIAKA O STRUKTURZE JEDNORODNEJ I KSZTAŁCIE SFEROIDY WYDŁUŻONEJ W JEDNORODNYM POLU ELEKTROSTATYCZNYM

### 6.1. Uwagi wstępne

Przy analizie zachowania się ziarna w polu elektrostatycznym, osie współrzędnych umieszcza się w głównych osiach sferoidy (Rys. 17).



Rys. 17. Ziarno o kształcie sferoidy wprowadzone w jednorodne pole  $E_0$ . Ziarno o przenikalności  $\epsilon_1$  jest umieszczone w środowisku (powietrzu) o przenikalności  $\epsilon_0$ .

Fig. 17. Spheroid grain introduced in uniform field. Grain permittivity is  $\epsilon_1$  and ambient air permittivity is  $\epsilon_0$ .

W jednorodnym polu elektrostatycznym  $E_0$  wytworzonym przez dwie elektrody o kształcie równoległych płaszczyzn, do których doprowadzono napięcie stałe, zawsze można tak usytuować sferoidę, że płaszczyzna  $XOZ$  będzie równoległa do linii sił pola. Wówczas składowa  $E_{0y} = 0$  a pozostałe składowe natężenia wymuszającego pola elektrycznego będą odpowiednio równe:

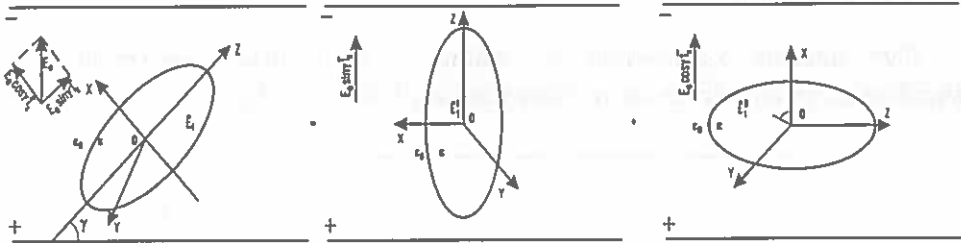
$$E_{0z} = E_0 \sin \gamma, \quad (10)$$

$$E_{0,x} = E_0 \cos \gamma, \quad (11)$$

gdzie:

$\gamma$  - kąt nachylenia dłuższej osi sferoidy (osi Z) względem płaszczyzny elektrody.

Natężenie pola elektrycznego wewnątrz sferoidy umieszczonej pod dowolnym kątem  $\gamma$  można znaleźć jako superpozycję natężeń wyznaczonych oddzielnie dla położenia pionowego i poziomego.



Rys. 18. Zastosowanie superpozycji.

Fig. 18. Application of superposition.

Możemy uważać, że pole (natężenie pola) w sferoidzie nachylonej pod kątem  $\gamma$  składa się z sumy dwóch pól:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^I + \mathbf{E}_1^{II} \quad (12)$$

gdzie:

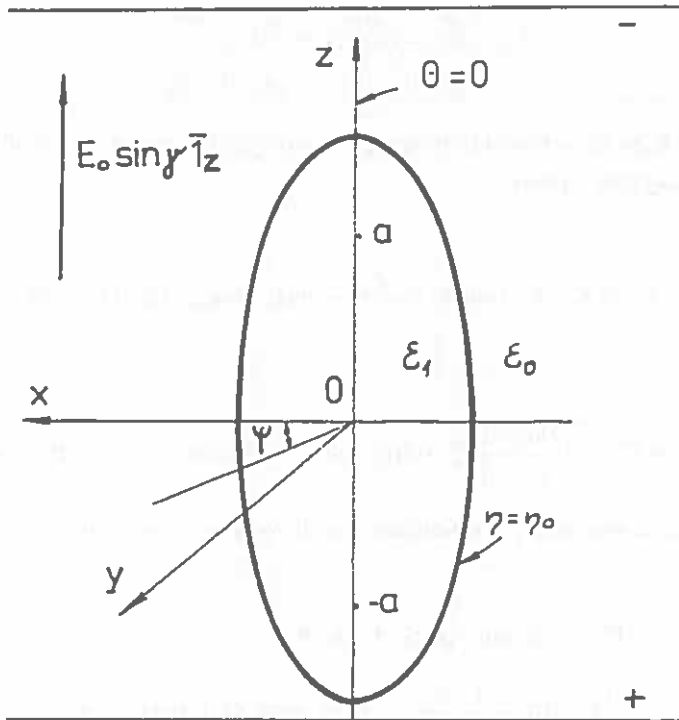
$\mathbf{E}_1^I$  - natężenie pola elektrycznego wywołane przez  $E_0 \sin \gamma \mathbf{1}_z$ ,

$\mathbf{E}_1^{II}$  - natężenie pola elektrycznego wywołane przez  $E_0 \cos \gamma \mathbf{1}_x$ .

## 6.2. Natężenie pola elektrycznego wywołane przez $E_0 \sin \gamma \mathbf{1}_z$ .

Potencjał wewnątrz i na zewnątrz sferoidy spełnia równanie Laplace'a [41, 42], które we współrzędnych sferoidy wydłużonej ma postać

$$\nabla^2 V = \frac{1}{a^2 (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \text{cth} \eta \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right\} + \frac{1}{a^2 \text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = 0 \quad (13)$$



Rys. 19. Sferoida przy pionowym położeniu w polu jednorodnym.

Fig. 19. Vertical position in uniform field.

Ziarno o kształcie sferoidy i przenikalności zastępczej  $\epsilon_1$  jest umieszczone w środowisku (np. w powietrzu) o przenikalności  $\epsilon_0$ , w którym istnieje jednorodne pole elektryczne  $E_0 \sin \gamma \bar{1}_z$  (Rys. 19).

Warunki brzegowe są następujące:

dla  $\eta \rightarrow \infty$

$$1^\circ) \quad V_0 = -E_0 \sin \gamma z + K = -E_0 a \sin \gamma \operatorname{ch} \eta \cos \theta + K, \quad (14)$$

dla  $\eta = \eta_0$

$$2^\circ) \quad V_0 = V_1, \quad (15)$$

oraz

$$3^{\circ}) \frac{\varepsilon_0}{(g_{11})^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = \frac{\varepsilon_1}{(g_{11})^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial V_1}{\partial \eta}. \quad (16)$$

Rozwiązanie tego zagadnienia opisanego w powyższy sposób jest podane w pracy [41] i ma następującą postać:

$$V_0' = K - E_0 a \sin \gamma \left[ \operatorname{ch} \frac{\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_0}}{L} \operatorname{ch} \eta_0 \operatorname{sh} n_0 Q_1(\operatorname{ch} \eta) \right] \cos \theta, \quad (17)$$

$$V_1' = K - \frac{E_0 a \sin \gamma}{L} \left[ Q_1'(\operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{ch} \eta_0 - Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{sh} n_0 \right] \operatorname{ch} \eta \cos \theta. \quad (18)$$

Stąd, zgodnie ze wzorem (35), natężenie pola w dowolnym punkcie zewnętrznym wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0^1 &= -E_0 \sin \gamma (\operatorname{sh} \eta^2 + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \mathbf{1}_\eta \left[ \operatorname{sh} \eta + \frac{1}{L} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \operatorname{ch} \eta_0 \operatorname{sh} \eta_0 Q_1'(\operatorname{ch} \eta) \right] \cos \theta + \right. \\ &\left. + \mathbf{1}_\theta \left[ \operatorname{ch} \eta + \frac{1}{L} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \operatorname{ch} \eta_0 \operatorname{sh} \eta_0 Q_1(\operatorname{ch} \eta) \right] \sin \theta \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Pole wewnątrz sferoidy jest polem jednorodnym i natężenie ma tylko jedną składową względem  $\mathbf{1}_z$ :

$$\mathbf{E}_1^1 = \mathbf{1}_z \frac{E_0 \sin \gamma}{L} \left[ Q_1'(\operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{ch} \eta_0 - Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{sh} n_0 \right]. \quad (20)$$

gdzie indeksy przy  $\mathbf{E}$ ,  $V$ ,  $\varepsilon$  oznaczają odpowiednio:

0 – obszar zewnętrzny o przenikalności  $\varepsilon_0$ ,

1 – obszar wewnętrzny o przenikalności  $\varepsilon_1$ .

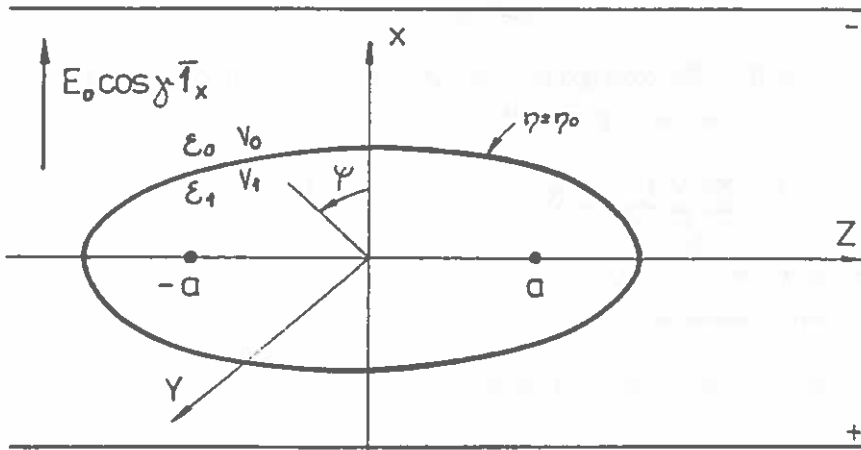
$Q_1(\operatorname{ch} \eta)$  - funkcja Legendre'a,

$$L = Q_1'(\operatorname{ch} \eta) \operatorname{ch} \eta - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{sh} n_0, \quad (21)$$

$$Q_1(\text{ch}\eta_0) = \frac{1}{2} \text{ch}\eta_0 \ln \left( \frac{\text{ch}\eta_0 + 1}{\text{ch}\eta_0 - 1} \right) - 1, \quad (22)$$

$$Q_1'(\text{ch}\eta_0) = \left[ \frac{d}{d\eta} Q_1(\text{ch}\eta) \right]_{\eta=\eta_0} = \frac{1}{2} \text{sh}\eta_0 \ln \frac{\text{ch}\eta_0 + 1}{\text{ch}\eta_0 - 1} - \text{cth}\eta_0. \quad (23)$$

### 6.3. Natężenie pola elektrycznego wywołane przez $E_0 \cos \gamma x$



Rys. 20. Sferoida przy położeniu „poziomym”.

Fig. 20. Horizontal position.

Warunki brzegowe są następujące:

dla  $\eta \rightarrow \infty$ ,

$$1^{\circ) \quad V_0 = -E_0 \cos \gamma x + K = -E_0 a \cos \gamma a \text{sch}\eta \sin \theta \cos \psi + K, \quad (24)$$

dla  $\eta = \eta_0$ ,

$$2^{\circ) \quad V_0 = V_1, \text{ oraz} \quad (25)$$

$$3^{\circ) \quad \frac{\epsilon_0}{(g_{11})^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = \frac{\epsilon_1}{(g_{11})^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial V_1}{\partial \eta}. \quad (26)$$

Przyjęto, że wielkość ziarna w porównaniu do odległości między płytkami jest tak mała, że pole w pobliżu drugiej płytki jest praktycznie nie zdekształcone. To założenie pozwala na użycie warunku brzegowego (24).

Przy położeniu poziomym zagadnienie nie jest osiowo symetryczne, jest więc zależne od  $\psi$ . Rozwiązania podstawowe równania Laplace'a mają postać [41]:

$$\left. \begin{aligned} V &= P_p^q(\text{ch}\eta) P_p^q(\cos\theta) \sin q\psi, \\ V &= P_p^q(\text{ch}\eta) Q_p^q(\cos\theta) \cos q\psi, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

Jak widać z Rys. 20 rozwiązanie ogólne powinno być parzyste względem  $\psi$ , musi więc zawierać funkcję  $\cos q\psi$ :

$$V = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p [A_{p,q} P_p^q(\text{ch}\eta) + B_{p,q} Q_p^q(\text{ch}\eta)] \cdot P_p^q(\cos\theta) \cos q\psi, \quad (28)$$

gdzie:  $0 \leq q \leq p$ ,

$q, p$  - liczby całkowite,

$\left. \begin{array}{l} P_p^q \\ Q_p^q \end{array} \right\}$  - stowarzyszone funkcje Legedre'a,

$A_{p,q}, B_{p,q}$  - współczynniki.

W tym przypadku, w odróżnieniu od rozwiązania obowiązującego przy położeniu pionowym sferoidy, zwykle funkcje Legendre'a zostały zastąpione przez funkcje stowarzyszone.

W przypadku ogólnym „ $p$ ” i „ $q$ ” w powyższych rozwiązaniach nie muszą być liczbami całkowitymi. Ponieważ w rozważanym zagadnieniu rozpatruje się całą sferoidę, funkcje sinus i cosinus w wyrażeniach (28) mają okresy równe  $2\pi$ , a więc  $q = 1, 2, 3, \dots$ . Również  $p$  pozostaje liczbą całkowitą ponieważ  $\theta$  zmienia się od 0 do  $\pi$ . Zazwyczaj funkcje  $P_p^q$  i  $Q_p^q$  zastępuje się w literaturze przez  $P_n^m$  i  $Q_n^m$  [3, 41], gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m \leq n$ . Liczba  $n$  nazywa się stopniem, a liczba  $m$  - rzędem funkcji.

Do wnętrza sferoidy należy odcinek  $|z| \leq a$ , leżący na osi  $z$ , dla którego  $\text{ch}\eta = 1$ , więc nie można w rozwiązaniu wewnętrznym przyjąć funkcji  $Q_n^m(\text{ch}\eta)$ , ponieważ [3]:

$$Q_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(z)}{dz^m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

co łącznie z (22) dowodzi, że  $Q_n^m(z) \rightarrow \infty$  dla  $z \rightarrow \infty$ .

Stąd

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{n,m} P_n^m(\operatorname{ch}\eta) + P_n^m(\cos\theta) \cos m\psi. \quad (30)$$

W obszarze zewnętrznym  $\eta > 0$ , dlatego  $Q_n(\operatorname{ch}\eta) > 1$ , można więc w rozwiązaniu stosować  $Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)$ :

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [B_{n,m} P_n^m(\operatorname{ch}\eta) + C_{n,m} Q_n^m(\operatorname{ch}\eta)] P_n^m(\cos\theta) \cos m\psi. \quad (31)$$

Podstawiając warunki brzegowe do wyrażeń (30) i (31) oraz uwzględniając, że dla  $\eta \rightarrow \infty$  funkcja  $Q_1^1(\operatorname{ch}\eta) = 0$ , otrzymuje się układ równań, z którego wyznaczamy współczynnik  $K, A_1, B_1, C_1$ . Ponieważ z (24) wynika, że jest tylko dopuszczalna wartość  $m = 1$ , więc wprowadzono oznaczenia skrótowe:  $A_{n,1} = A_n, B_{n,1} = B_n, C_{n,1} = C_n$ :

$$\left. \begin{aligned} K + (B_1 + E_0 \cos \gamma a) \operatorname{sh} \eta \sin \theta \cos \psi &= 0, \\ -A_1 \operatorname{sh} \eta_0 + C_1 Q_1^1(\operatorname{ch} \eta_0) &= E_0 a \cos \gamma \operatorname{sh} \eta_0, \\ A_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{ch} \eta_0 + C_1 [Q_1^1(\operatorname{ch} \eta_0)]' &= E_0 a \cos \gamma \operatorname{ch} \eta_0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Z zależności (32) mamy:

$$A_1 = -E_0 a \cos \gamma \cdot \frac{1}{L} \left\{ [Q_1^1(\operatorname{ch} \eta_0)]' - \operatorname{cth} \eta_0 Q_1^1(\operatorname{ch} \eta_0) \right\},$$

$$B_1 = -E_0 a \cos \gamma; \quad B_2 = B_3 = \dots = 0,$$

$$A_2 = A_3 = \dots = 0,$$

$$C_1 = E_0 a \cos \gamma (\operatorname{ch} \eta_0) \cdot \frac{1}{L} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right),$$

$$C_2 = C_3 = \dots = 0,$$

$$K = 0,$$



gdzie  $L = \left\{ [Q'_1(\text{ch}\eta_0)]' + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \text{cth}\eta_0 Q'_1(\text{ch}\eta_0) \right\}$ .

Ostatecznie rozwiązanie (31) i (30) upraszcza się do postaci:

$$V_0'' = E_0 a \cos \gamma \left[ -\text{sh}\eta + \text{ch}\eta_0 \frac{1}{L} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} - 1 \right) Q'_1(\text{ch}\eta_0) \right] \sin \theta \cos \psi, \quad (33)$$

$$V_1'' = E_0 \cos \gamma \frac{1}{L} \left\{ [Q'_1(\text{ch}\eta_0)]' - \text{cth}\eta_0 Q'_1 \text{cth}\eta_0 \right\} \cdot x. \quad (34)$$

Natężenie pola określone jest wyrażeniem [41, 85]:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = - \left[ \frac{\mathbf{1}_\eta}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{1}_\theta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{1}_\psi}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial V}{\partial \psi} \right], \quad (35)$$

gdzie:  $g_{ii}$  - współczynniki metryki.

Z równania (33) i (35) otrzymano natężenie pola w dowolnym punkcie zewnętrznym:

$$\begin{aligned} E_0'' = E_0 a \cos \gamma & \left\{ \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta}} \left[ \mathbf{1}_\eta \left( -\text{ch}\eta + \text{ch}\eta_0 \frac{\epsilon_1 - 1}{L} [Q'_1(\text{ch}\eta_0)]' \right) \right] \sin \theta \cos \psi + \right. \\ & \left. + \mathbf{1}_\theta \left( -\text{sh}\eta + \text{ch}\eta_0 \frac{\epsilon_1 - 1}{L} Q'_1(\text{ch}\eta) \right) \cos \theta \cos \psi \right] - \\ & \left. - \mathbf{1}_\psi \frac{1}{\text{sh}\eta \sin \theta} \left[ -\text{sh}\eta + \text{ch}\eta_0 \frac{\epsilon_1 - 1}{L} Q'_1(\text{ch}\eta) \right] \sin \theta \sin \psi \right\}. \quad (36) \end{aligned}$$

Z równania (34) wynika, że pole wewnątrz sferoidy jest jednorodne, podobnie jak przy położeniu „pionowym”. Natężenie wewnątrz sferoidy otrzymano różniczkując to wyrażenie względem  $x$ :

$$\mathbf{E}_1^{\text{II}} = -1_x \frac{E_0 \cos \gamma}{L} \left\{ [Q_1'(\text{ch} \eta_0)]' - \text{cth} \eta_0 Q_1'(\text{ch} \eta_0) \right\} \quad (37)$$

#### 6.4. Zmiana energii pola elektrostatycznego ziarniaka jednorodnego

Przy obliczaniu zmiany energii ziarniaka zakłada się, że w przypadku umieszczenia go w polu elektrycznym o ustalonych źródłach, jego odpowiedź jest liniowa (tzn. że jego polaryzacja jest wprost proporcjonalna do natężenia zewnętrznego pola elektrycznego). Początkowa energia elektrostatyczna w obszarze o kształcie sferoidy, znajdującym się w przestrzeni np. między układem płaskich elektrod wytwarzających pole elektryczne  $\mathbf{E}_0$ , wypełnionej powietrzem o stałej dielektrycznej  $\epsilon_0$  jest równa [2, 19, 85, 86]:

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_G \mathbf{E}_0 \mathbf{D}_0 dG, \quad (38)$$

gdzie:

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0,$$

$G$  – objętość sferoidy.

Przy niezmiennych położeniach źródeł (elektrod), umieszcza się w miejscu rozważanej sferoidy ziarniak o analogicznym kształcie, objętości  $G$  i przenikalności  $\epsilon_1$ . Jego obecność zmienia pole w tym obszarze z  $\mathbf{E}_0$  na  $\mathbf{E}$ . W obszarze zajęтым przez ziarniak energia ma teraz wartość:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_G \mathbf{E} \mathbf{D} dG, \quad (39)$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E}.$$

Zmiana energii spowodowana zmianą  $\epsilon$  (wprowadzeniem w obszar o przenikalności  $\epsilon_0$  i natężeniu  $\mathbf{E}_0$  ziarniaka o przenikalności  $\epsilon_1$ ) wynosi:

$$W_Q = W_1 - W_0 = \frac{1}{2} \int_G (\mathbf{E} \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \mathbf{D}_0) dG. \quad (40)$$

Na mocy założenia, że wstawienie do obszaru pola dodatkowego dielektryka nie zmienia gęstości ładunku źródeł pola ( $\delta_p = 0$ ) otrzymuje się ostatecznie następujące wyrażenie na zmianę energii [19]:

$$W_Q = -\frac{1}{2} \int_G (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 dG = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_G \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 dG. \quad (41)$$

W naszym przypadku bada się zachowanie ziarniaka w polu elektrycznym wytwarzanym przez układ elektrod połączonych z zewnętrznym źródłem o ustalonych potencjałach. W czasie zmiany położenia ziarniaka następuje ruch ładunków między baterią a elektrodami w ten sposób, żeby potencjał elektrod nie uległ zmianie.

Porównując zmianę energii, w tym przypadku przy ustalonych potencjałach, ze zmianą przy ustalonych źródłach, stwierdza się ich równość [19]:

$$W_V = -W_Q = W \quad (42)$$

gdzie indeksy  $V$  i  $Q$  oznaczają odpowiednio wielkości potencjału i ładunku nie ulegające zmianie.

Wstawiając do (41) wartości natężeń pola zgodnie z (12), (19), (20), (36) i (37) otrzymano:

$$W = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_0^{\eta_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{E}_I^I + \mathbf{E}_I^{II}) (E_{0x} \mathbf{1}_x + E_{0z} \mathbf{1}_z) dG, \quad (43)$$

gdzie:

$$E_{0x} = E_0 \cos \gamma, \quad E_{0z} = E_0 \sin \gamma,$$

$dG$  – element objętości ziarniaka we współrzędnych sferoidy wydłużonej [41],

$$dG = a^3 \operatorname{sh} \eta \sin \theta (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta) d\eta d\theta d\psi. \quad (44)$$

Po wykonaniu w (43) całkowania otrzymano ostateczną wartość na zmianę energii:

$$W = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 G E_0^2 \cdot K_e, \quad (45)$$

gdzie:  $G$  – objętość sferoidy, przyjęta w obliczeniach za wartość stałą,

$$G = \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{sh}^2 \eta_0 \operatorname{ch} \eta_0 = \text{const}, \quad (46)$$

$$K_e = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) (\sin^2 \gamma H_1 - \cos^2 \gamma H_2), \quad (47)$$

$$H_1 = \frac{1}{L} \{ [Q_1(\text{ch}\eta_0)] \text{ch}\eta_0 - Q_1(\text{ch}\eta_0) \text{sh}\eta_0 \} \quad (48)$$

$$H_2 = \frac{1}{W_L} \{ [Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' - \text{cth}\eta_0 Q_1'(\text{ch}\eta_0) \}, \quad (49)$$

$$\text{sh}\eta_0 = \frac{B_w}{\sqrt{1 - B_w^2}}, \quad (50)$$

$$\text{ch}\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - B_w^2}}, \quad \text{cth}\eta_0 = \frac{1}{B_w}, \quad (51)$$

$$\epsilon_w = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}, \quad (52)$$

$B_w = \frac{b}{c}$  - współczynnik sferyczności ziarniaka,

$$Q_1'(\text{ch}\eta_0) = \frac{1}{2} \text{sh}\eta_0 \ln \frac{\text{ch}\eta_0 + 1}{\text{ch}\eta_0 - 1} - \text{cth}\eta_0, \quad (53)$$

$$[Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' = \left[ \frac{dQ_1'(\text{ch}\eta)}{d\eta} \right]_{\eta=\eta_0} = \frac{1}{2} \text{ch}\eta_0 \ln \frac{\text{ch}\eta_0 + 1}{\text{ch}\eta_0 - 1} + \text{cth}^2\eta_0 - 2 \quad (54)$$

$$L = [Q_1(\text{ch}\eta_0)]' \text{ch}\eta_0 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} Q_1(\text{ch}\eta_0) \text{sh}\eta_0, \quad (55)$$

$$W_L = -[Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} Q_1'(\text{ch}\eta_0) \frac{1}{B_w}, \quad (56)$$

$Q_1(\text{ch}\eta_0)$  i  $[Q_1(\text{ch}\eta_0)]'$  dane są wzorami (22) i (23).

Znak „ - ” w wyrażeniu (45) wskazuje, że wprowadzenie w obszar pola elektrycznego dielektrycznej sferoidy (ziarniaka) powoduje zmniejszenie energii pola.

Funkcja  $K_e$  uwzględnia ilościowe zmniejszenia tej energii w objętości zajętej przez sferoidę o jednostkowej objętości w zależności od kąta  $\gamma$ , jej przenikalności dielektrycznej  $\epsilon_1$  i współczynnika sferyczności  $B_w$ .

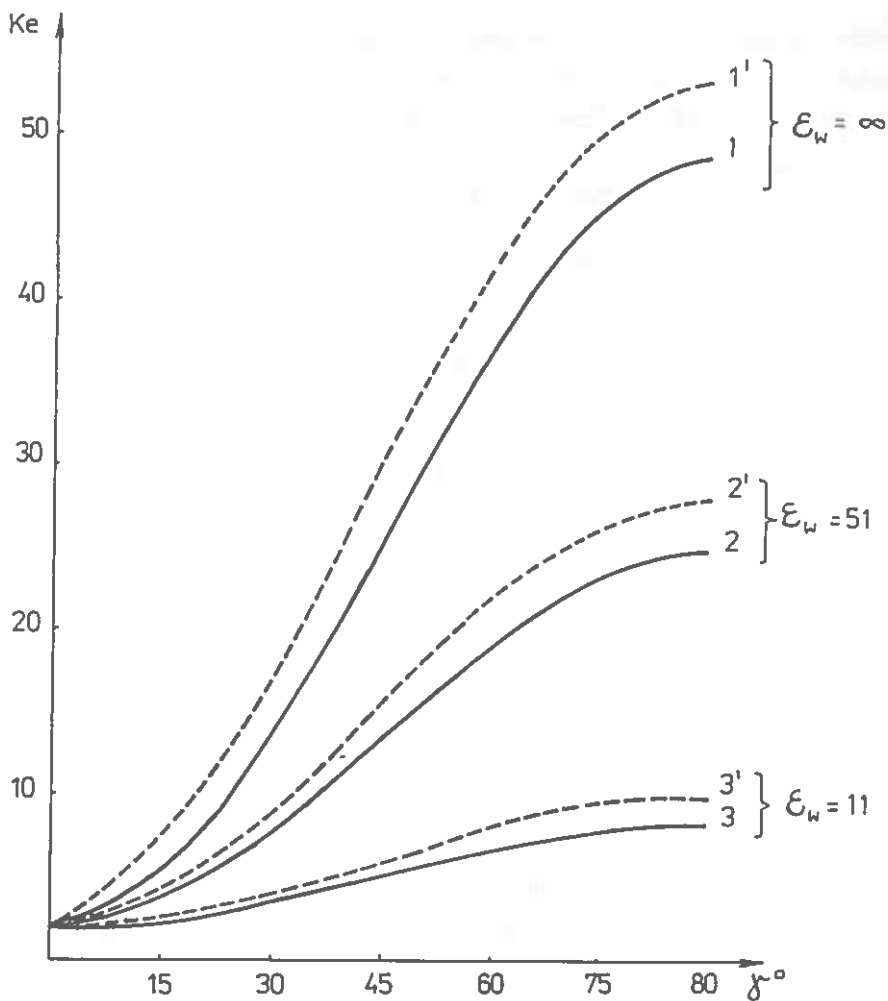
Funkcję  $K_e = f(\gamma, \epsilon_w, B_w)$  obliczono numerycznie. Niektóre wyniki przedstawiono w Tabelach 5 ÷ 8 oraz na Rys. 21 ÷ 23. Na Rys. 21 dodatkowo przytoczono dla porównania wyniki uzyskane w pracy [2].

Tabela 5. Wartość  $K_e = f(\gamma)$  przy wybranych wartościach  $\epsilon_w$  dla  $B_w = 0,1$

Table 5.  $K_e = f(\gamma)$  at selected  $\epsilon_w$  for  $B_w = 0,1$

$\gamma [^\circ]$	$K_e$					
	$\epsilon_w = 2,0$	$\epsilon_w = 5,0$	$\epsilon_w = 11,0$	$\epsilon_w = 30,0$	$\epsilon_w = 51,0$	$\epsilon_w = 10^4$
0	0,671	1,352	1,695	1,907	1,961	2,041
15	0,692	1,509	2,139	3,003	3,493	5,190
30	0,748	1,930	3,350	5,995	7,677	13,794
45	0,826	2,526	5,004	10,083	13,392	25,547
60	0,903	3,113	6,659	14,171	19,107	37,300
75	0,959	3,542	7,870	17,163	23,291	45,904
90	0,980	3,700	8,314	18,259	24,823	49,054

Jak wynika z wykresów przytoczonych na Rys.21 uproszczenia uczynione w pracy [2] spowodowały około 8 % wzrost obliczanej energii nie zmieniając przy tym charakteru przebiegu krzywych. Dlatego też wnioski, które zostały wyciągnięte w [2] w tym samym stopniu pozostają aktualne dla prezentowanych w tym miejscu wyników.



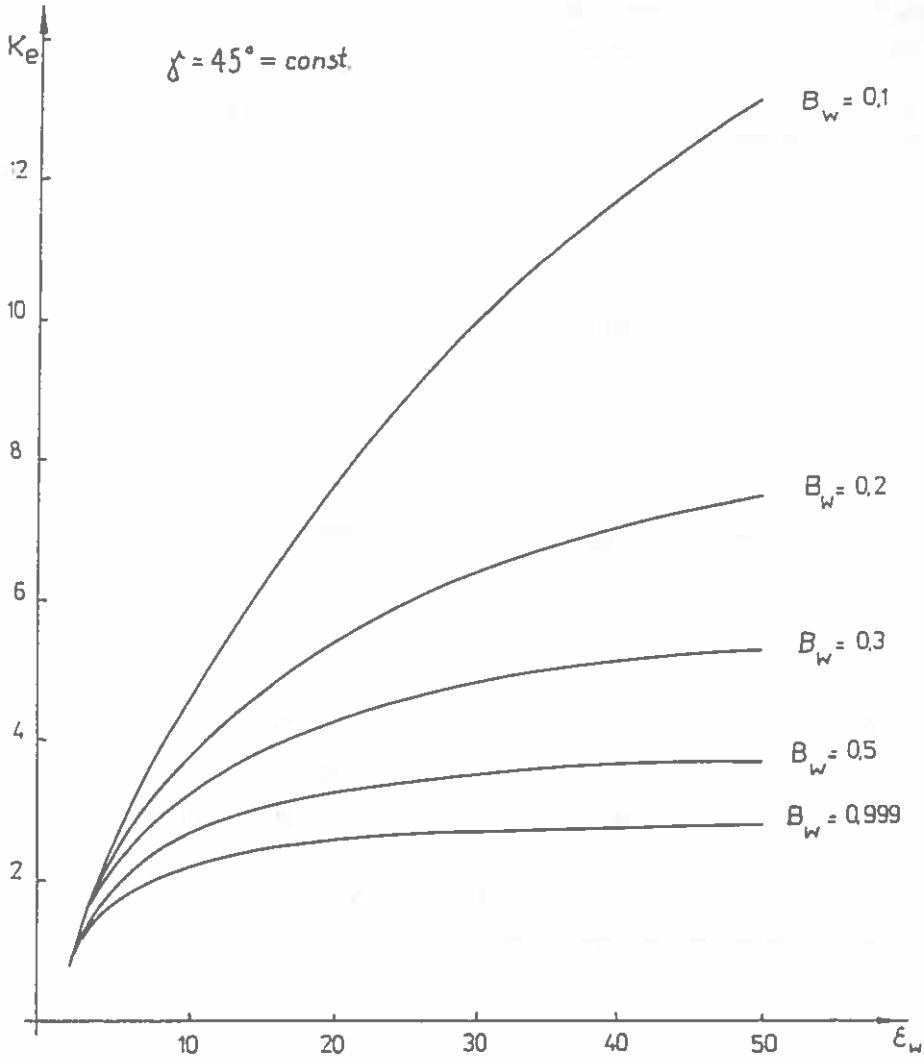
Rys. 21. Zależność  $K_e = f(\gamma)$  przy różnych  $\epsilon_w$ , oraz  $B_w = 0,1$ . Linie ciągłe odpowiadają wynikom otrzymanym w niniejszej pracy a linie przerywane dotyczą wyników z pracy [2].  
 Fig. 21.  $K_e = f(\gamma)$  at different  $\epsilon_w$  and  $B_w = 0,1$ . Solid lines relevant to obtainer results, dotted lines relevant to [2].

Tabela 6. Wartość  $K_e = f(\epsilon_w)$  przy wybranych wartościach  $B_w$  dla  $\gamma = 45^\circ$ Table 6.  $K_e = f(\epsilon_w)$  at selected  $B_w$  for  $\gamma = 45^\circ$ 

$\epsilon_w$	$K_e$					
	$B_w = 0,1$	$B_w = 0,3$	$B_w = 0,5$	$B_w = 0,7$	$B_w = 0,9$	$B_w = 0,999$
2	0,826	0,801	0,780	0,765	0,754	0,750
5	2,526	2,160	1,934	1,808	1,737	1,714
10	4,637	3,309	2,710	2,430	2,291	2,250
15	6,343	3,952	3,073	2,697	2,520	2,471
20	7,779	4,369	3,284	2,846	2,646	2,591
30	10,083	4,878	3,520	3,007	2,780	2,719
40	11,857	5,178	3,649	3,092	2,850	2,786
50	13,267	5,376	3,731	3,145	2,894	2,827
$10^4$	25,547	6,342	4,089	3,370	3,075	3,000

Z wykresu funkcji  $K_e = f(\epsilon_w)$  przedstawionego na Rys. 22 i z Tabeli 6 wynika, że:

1. Ze zwiększeniem przenikalności dielektrycznej  $\epsilon_w$  sferoidy (ziarniaka) funkcja  $K_e$  również wzrasta, przy czym ten wzrost nie jest proporcjonalny do wielkości  $\epsilon_w$ . Największy wzrost obserwuje się w przedziale zmienności  $\epsilon_w$  od wartości 2 do 30, po czym krzywa ulega „nasyceciu”, szczególnie przy ziarniakach o sferyczności  $B_w \geq 0,3$ .
2. Stopień zmniejszenia energii pola zależy silnie od współczynnika sferyczności ziarniaka  $B_w$ . Im mniejszy współczynnik  $B_w$ , tym większy stopień zmniejszenia energii przy stałej przenikalności  $\epsilon_w$ .
3. Przy przenikalności ziarniaka  $\epsilon_w \leq 2$ , funkcja  $K_e$  w niewielkim stopniu zależy od zmian  $B_w$ .



Rys. 22. Zależność  $K_e = f(\epsilon_w)$  przy różnych współczynnikach sferyczności sferoidy.

Fig. 22.  $K_e = f(\epsilon_w)$  at different spherical coefficients.

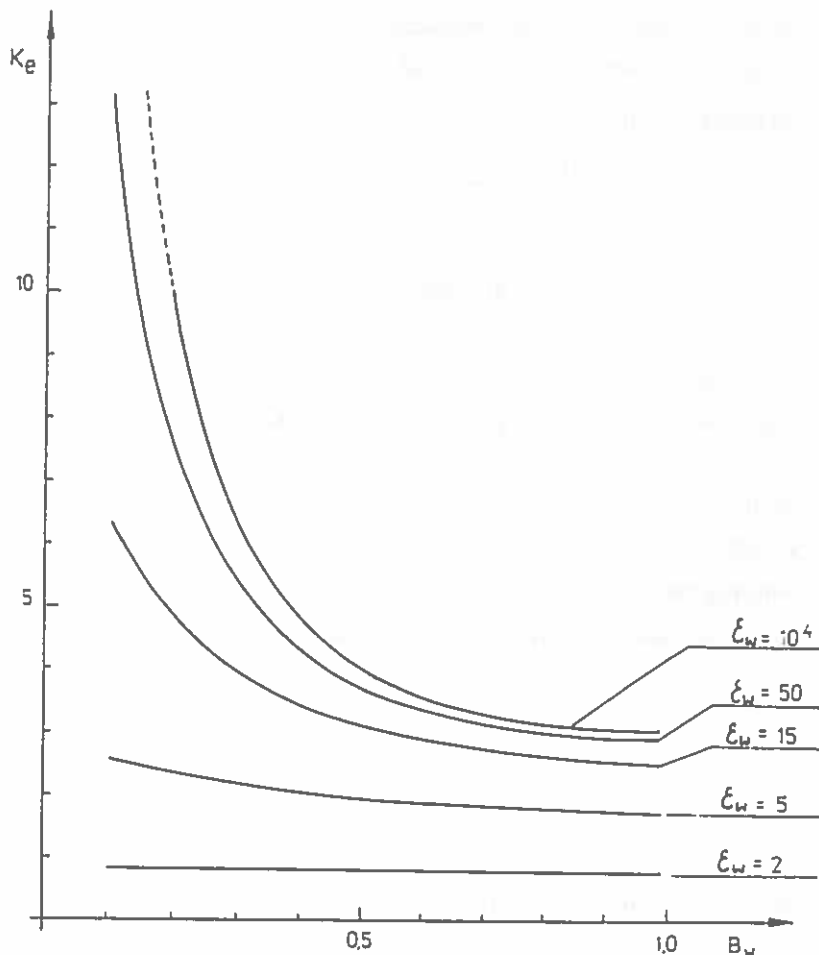


Tabela 7. Wartości  $K_e = f(B_w)$  przy wybranych wartościach  $\epsilon_w$  dla  $\gamma = 45^\circ$ Table 7.  $K_e = f(B_w)$  at selected  $\epsilon_w$  for  $\gamma = 45^\circ$ 

$B_w$	$K_e$					
	$\epsilon_w = 2,0$	$\epsilon_w = 5,0$	$\epsilon_w = 15$	$\epsilon_w = 30$	$\epsilon_w = 50$	$\epsilon_w = 10^4$
0,1	0,826	2,526	6,343	10,083	13,267	25,547
0,2	0,813	2,327	4,849	6,524	7,574	10,000
0,3	0,801	2,160	3,952	4,878	5,376	6,342
0,4	0,790	2,031	3,413	4,018	4,318	4,853
0,5	0,780	1,934	3,073	3,520	3,731	4,089
0,6	0,772	1,862	2,849	3,210	3,374	3,646
0,7	0,765	1,808	2,697	3,007	3,145	3,370
0,8	0,759	1,768	2,593	2,872	2,994	3,192
0,9	0,754	1,737	2,520	2,780	2,894	3,075
0,999	0,750	1,714	2,471	2,719	2,827	3,000

Z wykresu funkcji  $K_e = f(B_w)$  przedstawionej na Rys. 23 wynika, że:

1. Wzrost współczynnika sferyczności  $B_w$  ziarniaka wywołuje hiperboliczny (w przybliżeniu) spadek funkcji  $K_e$ , szczególnie przy przenikalności  $\epsilon_w > 5$ .
2. Przy ziarniakach o małej przenikalności dielektrycznej ( $\epsilon_w < 5$ ) zmiana współczynnika sferyczności  $B_w$  wywiera niewielki wpływ na zmianę  $K_e$ , a tym samym na zmniejszenie energii pola.



Rys. 23. Zależność  $K_e = f(B_w)$  przy różnych przenikalnościach sferoidy.

Fig. 23.  $K_e = f(B_w)$  at different spheroid permittivities.

### 6.5. Moment działający na ziarniak jednorodny umieszczony w polu elektrostatycznym

Spolaryzowany ziarniak w polu elektrycznym zmienia swoje położenie ustawiając się dłuższą osią w kierunku linii sił pola. W czasie tego ruchu (tzw. orientacji) energia pola elektrycznego zamienia się w pracę mechaniczną. Dla uproszczenia analizy procesu orientacji zakładamy, że zachodzi on nieskończenie wolno, dzięki czemu można pominąć straty ciepłne  $dA_c$  i straty na

wolno, dzięki czemu można pominąć straty ciepłne  $dA_c$  i straty na promieniowanie elektromagnetyczne  $dA_{\text{mag}} + dA_{\text{prom}}$ . W związku z tym prawo zachowania energii [50]:

$$dA = dW + dA_{\text{mech}} + dA_c + dA_{\text{magn}} + dA_{\text{prom}}, \quad (57)$$

przyjmie kształt

$$dA = dW + dA_{\text{mech}}, \quad (58)$$

gdzie:

$dA$  - praca źródeł energii,

$dW$  - energia układu uzyskana z pracy źródeł energii,

$dA_{\text{mech}}$  - energia mechaniczna,

$dA_c$  - energia cieplna,

$dA_{\text{mag}}$  - energia magnetyczna,

$dA_{\text{prom}}$  - energia promieniowania.

Jeżeli odłączymy układ elektrod od źródła zasilania to  $dA = 0$  i równanie (58) uprości się do postaci:

$$dW + dA_{\text{mech}} = 0. \quad (59)$$

Stąd

$$dA_{\text{mech}} = -dW. \quad (60)$$

Jak wynika z równania (60) praca mechaniczna, która polega na obracaniu ziarniaka w polu elektrycznym jest wykonywana kosztem zmniejszenia energii zgromadzonej w systemie: układ elektrod – ziarniak. Uzyskana przy tym praca wynosi:

$$dA_{\text{mech}} = M_e d\gamma. \quad (61)$$

gdzie:

$M_e$  - moment obracający ziarniak,

$\gamma$  - kąt (p. Rys. 17).

Wstawiając (61) do (60) otrzymuje się wyrażenie na wartość momentu obrotowego  $M_e$  oddziaływującego na ziarniak w polu elektrycznym.

$$M_e = -\frac{dW}{d\gamma} \quad (62)$$

Różniczkując zgodnie ze wzorem (62), wyrażenie na energię (45) uzyskano:

$$M_e = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 G \cdot E_0^2 \frac{dK_e}{d\gamma} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 G \cdot E_0^2 \Phi \sin 2\gamma, \quad (63)$$

gdzie:

$$\Phi = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) (H_1 + H_2). \quad (64)$$

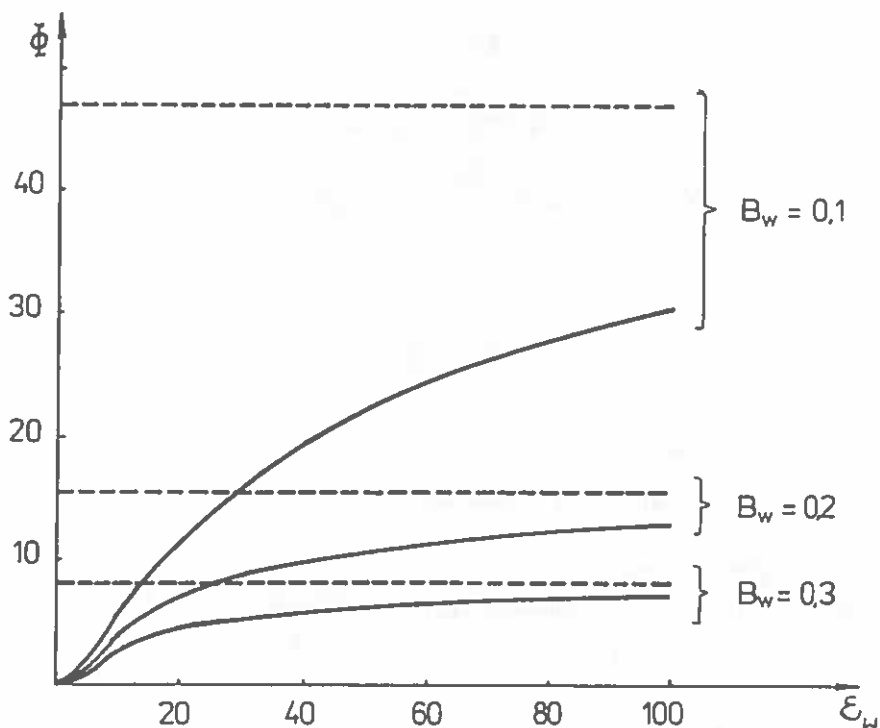
Wielkość  $\Phi$  uwzględnia wpływ kształtu  $B_w$  i uśrednionej względnej przenikalności dielektrycznej ziarniaka  $\varepsilon_w = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$  na wielkość momentu obrotowego nań działającego.

Zależność  $\Phi$  od  $B_w$  i  $\varepsilon_w$  stabilaryzowano na maszynie cyfrowej. Wybrane wyniki przedstawiono w Tabeli 8 oraz graficznie na Rys. 24 i 25.

Tabela 8. Wartości  $\Phi = f(\varepsilon_w, B_w)$

Table 8.  $\Phi = f(\varepsilon_w, B_w)$  values

$B_w$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,999
$\varepsilon_w$						
2	0,309	0,224	0,145	0,078	0,024	0,000
5	2,348	1,472	0,853	0,431	0,125	0,001
10	5,947	3,068	1,606	0,770	0,217	0,002
15	9,122	4,086	2,018	0,944	0,263	0,002
20	11,871	4,776	2,274	1,047	0,289	0,003
30	16,351	5,647	2,573	1,165	0,319	0,003
50	22,614	6,522	2,849	1,270	0,346	0,003
100	30,909	7,319	3,082	1,357	0,368	0,003
$\infty$	47,013	8,264	3,339	1,450	0,391	0,004

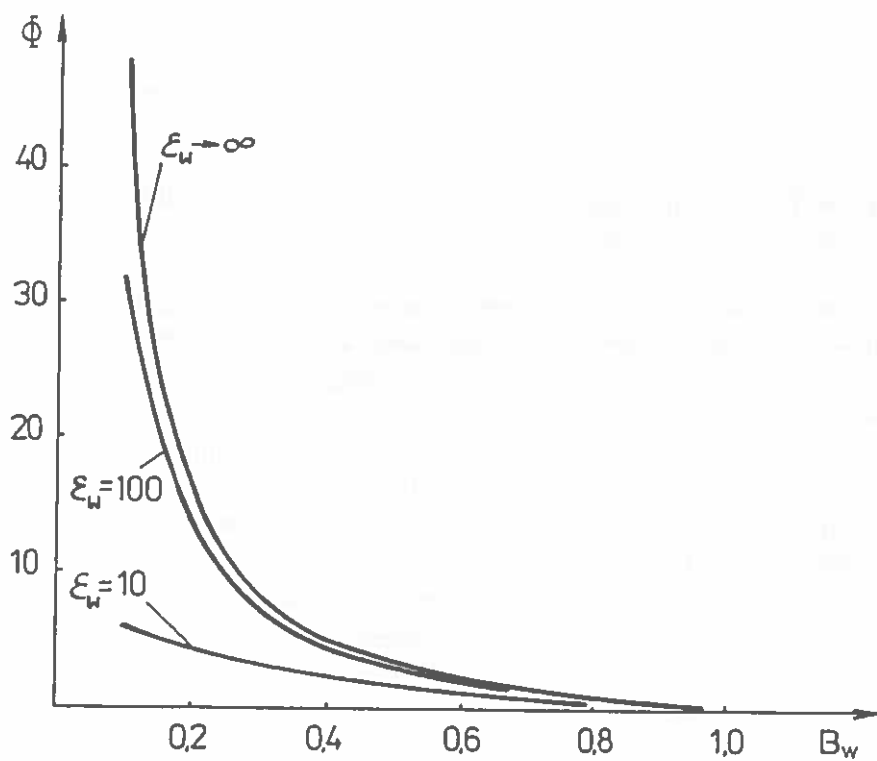


Rys. 24. Zależność  $\Phi$  od  $\epsilon_w$ . Linie przerywane są asymptotami odpowiadającymi wartościom  $\Phi$  przy  $\epsilon_w \rightarrow \infty$ .

Fig. 24. Dependence  $\Phi$  vs  $\epsilon_w$ . Dotted lines are asymptotes relevant to  $\Phi$  at  $\epsilon_w \rightarrow \infty$ .

Przebieg funkcji  $\Phi = f(\epsilon_w)$  jest analogiczny jak w [2], a jej wartości różnią się w tym samym stopniu jak  $K_e$  (p. Rys. 21).

Na Rys. 25 przedstawiono wpływ współczynnika sferyczności  $B_w$  na wartość funkcji  $\Phi$  a tym samym i momentu (63). Z rysunku wynika, że dla dowolnego  $\epsilon_w$  przy  $B_w \rightarrow 1$ ,  $\Phi \rightarrow 0$  a więc zgodnie z zależnością (63)  $M_e \rightarrow 0$ . Oznacza to, że ziarna o tej samej masie i identycznych właściwościach ale o różnej sferyczności będą orientować się przy różnych natężeniach pola elektrycznego, tzn. ziarna o mniejszym współczynniku  $B_w$  będą się orientować przy mniejszym natężeniu.



Rys. 25. Zależność  $\Phi$  od  $B_w$  dla różnych przenikalności ziarniaka .

Fig. 25. Dependence  $\Phi$  vs  $B_w$  at different grain permittivity.

## 7. ZACHOWANIE SIĘ ZIARNIAKA O BUDOWIE WARSTWOWEJ W POLU ELEKTROSTATYCZNYM

Metody analizy pól elektromagnetycznych w urządzeniach o strukturze warstwowej (obwody magnetyczne zbudowane z blach izolowanych względem siebie, uzwojenie foliowe itp.) są najczęściej opracowane przy założeniu, że ich budowa jest jednorodna. Przy tym samym założeniu były prowadzone obliczenia elektrostatyczne dotyczące zachowania się ziarniaka w polu elektrycznym, we wszystkich znanych autorowi publikacjach [2, 11, 12, 18, 32, 33, 71, 76, 91, 95]. W ogólnym przypadku przyjęcie takiego założenia prowadzi do obniżenia dokładności analizy [53].

Osobliwością struktury wielowarstwowej jest złożona zależność pola od jej charakteru geometrycznego i właściwości elektrycznych poszczególnych warstw, czego nie może uwzględnić model o strukturze jednorodnej i o uśrednionych właściwościach. Przyjęcie modelu jednorodnego uniemożliwia np. obliczenie sił elektrostrykcyjnych.

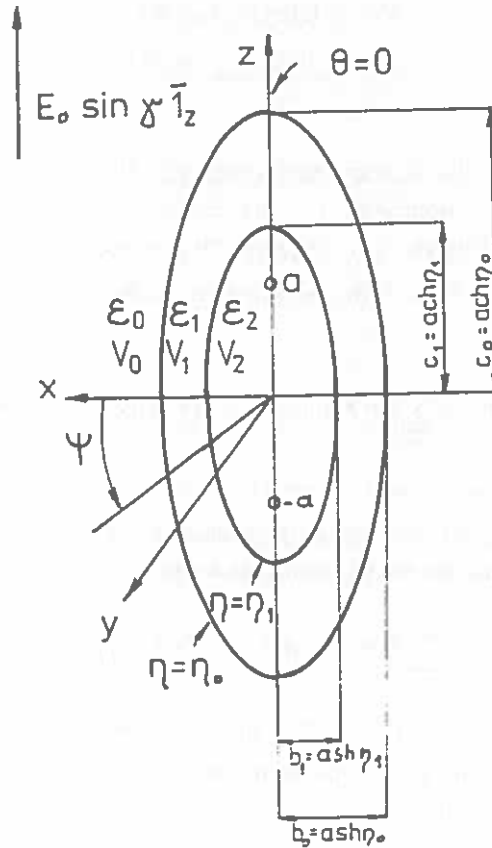
W rozdziale 6 obliczono, metodą rozdzielania zmiennych, użytą do równania Laplace'a, siłę ponderomotoryczną działającą na ziarniak o strukturze jednorodnej. W niniejszym rozdziale obliczono tę siłę przy założeniu, że ziarniak składa się z dwóch warstw: warstwy okrywowej – zewnętrznej oraz warstwy wewnętrznej, w skład której wchodzi zarodek, skrobia i bielmo aleuronowe.

### 7.1. Natężenie pola elektrycznego wywołane przez $E_0 \sin \gamma 1$ .

W obszarze o stałej dielektrycznej  $\varepsilon = \varepsilon_0$  (powietrze), zostaje umieszczony ziarniak o kształcie sferoidy wydłużonej  $\eta = \eta_0$ . Oś dłuższa ziarniaka ma kierunek zgodny z kierunkiem wektora natężenia pola elektrostatycznego  $E_0$ .

Należy określić rozkład potencjału oraz natężenia pola na zewnątrz ziarniaka i wewnątrz obydwóch jego warstw wewnętrznych.

Początek układu współrzędnych przyjęto w środku ziarniaka. Dodatnia część osi z skierowana jest zgodnie z liniami pola  $E_0$ . Przez  $V_0, V_1, V_2$  oznaczono potencjał odpowiednio na zewnątrz i w warstwach ziarniaka.



Rys. 26. Ziarniak o kształcie sferoidy umieszczony w jednorodnym polu elektrostatycznym w środowisku o przenikalności  $\epsilon_0$  (powietrze). Dłuższa oś ziarniaka pokrywa się z kierunkiem wektora natężenia pola.

Fig. 26. Spheroidal grain located in a uniform electric field of electric permittivity  $\epsilon_0$  (air). It's longer axis is parallel to field intensity vectors.

Przekrój badanego ziarniaka, wymiary geometryczne i przyjęty układ współrzędnych podano na Rys. 26. W rozpatrywanym obszarze, zgodnie z założeniami (rozdz. 5.1) brak jest ładunków przestrzennych ( $\rho=0$ ), więc obowiązuje w nim równanie Laplace'a (13).

Ponieważ ziarniak w przybliżeniu ma kształt sferoidy dwuosiowej, to podstawowe rozwiązania równania Laplace'a we współrzędnych sferoidy wydłużonej są osiowosymetryczne – niezależne od  $\psi$  [42]:



$$\left. \begin{aligned} V &= P_n(\operatorname{ch}\eta)P_n(\cos\theta), \\ V &= Q_n(\operatorname{ch}\eta)Q_n(\cos\theta), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

W rozwiązaniach dla obszaru zewnętrznego „0” wyłączono wyrazy funkcji Legendre’a  $Q_n(\cos\theta)$ , ponieważ  $Q_n$  ma osobliwość dla argumentu  $x = \pm 1$ , a  $\theta = 0$  oraz  $\theta = \pi$  należy do tego obszaru. Dla obszaru zewnętrznego  $\eta > \eta_0 > 0$ , więc  $\operatorname{ch}\eta > 1$ . W związku z tym rozwiązanie może zawierać funkcje  $Q_n(\operatorname{ch}\eta)$ . Stąd:

$$V_0^I = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n^I P_n(\operatorname{ch}\eta) + C_n^I Q_n(\operatorname{ch}\eta)] P_n(\cos\theta). \quad (66)$$

W warstwie zewnętrznej ziarniaka „1” dla  $\eta_1 < \eta < \eta_0$  w rozwiązaniu opisującym potencjał, z tych samych powodów co wyżej, nie można zastosować funkcji  $Q_n(\cos\theta)$ . Stąd też rozwiązanie ma kształt:

$$V_1^I = \sum_{n=0}^{\infty} [D_n^I P_n(\operatorname{ch}\eta) + F_n^I Q_n(\operatorname{ch}\eta)] P_n(\cos\theta). \quad (67)$$

Do wnętrza ziarniaka „2” dla  $0 \leq \eta \leq \eta_1$  należy zarówno  $\cos\theta = \pm 1$  jak i  $\operatorname{ch}\eta = 1$ . Stąd też rozwiązanie nie może zawierać funkcji  $Q_n(\operatorname{ch}\eta)$  i  $Q_n(\cos\theta)$ , które w tych punktach mają osobliwości.

Potencjał w tym obszarze opisuje więc równanie:

$$V_2^I = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^I P_n(\operatorname{ch}\eta) P_n(\cos\theta). \quad (68)$$

Stałe występujące w rozwiązaniach (66 + 68) wyznacza się z warunków ciągłości potencjału oraz ciągłości składowej normalnej indukcji elektrycznej na powierzchniach granicznych  $\eta = \eta_0$  i  $\eta = \eta_1$  [19, 42]:

– dla  $\eta \rightarrow \infty$ ,

$$V_0^I = -E_0 \sin \gamma z + K = -E_0 \sin \gamma a \operatorname{ch}\eta \cos\theta + K, \quad (69)$$

– dla  $\eta = \eta_0$ ,

$$V_0^I = V_1^I, \quad (70)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial V_0^1}{\partial \eta} = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial V_1^1}{\partial \eta}, \quad (71)$$

– dla  $\eta = \eta_1$

$$V_1^1 = V_2^1, \quad (72)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial V_1^1}{\partial \eta} = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial V_2^1}{\partial \eta}. \quad (73)$$

Podstawiając do tych warunków brzegowych szeregi (66 ÷ 68) opisujące poszukiwane rozwiązania uzyskujemy związki dla poszczególnych współczynników:

$$A_0^1 = K, \quad A_1^1 = \frac{W_{A_1}^1}{W_1}, \quad A_2^1 = A_3^1 = \dots = 0, \quad (74)$$

$$B_0^1 = K, \quad B_1^1 = E_0 \cdot a \sin \gamma, \quad B_2^1 = B_3^1 = \dots = 0, \quad (75)$$

$$C_0^1 = 0, \quad C_1^1 = \frac{W_{C_1}^1}{W_1}, \quad C_2^1 = C_3^1 = \dots = 0, \quad (76)$$

$$D_0^1 = K, \quad D_1^1 = \frac{W_{D_1}^1}{W_1}, \quad D_2^1 = D_3^1 = \dots = 0, \quad (77)$$

$$F_0^1 = 0, \quad F_1^1 = \frac{W_{F_1}^1}{W_1}, \quad F_2^1 = F_3^1 = \dots = 0, \quad (78)$$

gdzie:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & Q_1(\text{ch}\eta_0) & -\text{ch}\eta_0 & -Q_1(\text{ch}\eta_0) \\ 0 & Q_1'(\text{ch}\eta_0) & -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \text{sh}\eta_0 & -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} Q_1'(\text{ch}\eta_0) \\ -\text{ch}\eta_1 & 0 & \text{ch}\eta_1 & Q_1(\text{ch}\eta_1) \\ -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \text{sh}\eta_1 & 0 & \text{sh}\eta_1 & Q_1'(\text{ch}\eta_1) \end{bmatrix}, \quad (79)$$

$$W_{A_1}^1 = E_0 a \sin \gamma W_{A_1}^{1a}, \quad (80)$$

$$W_{A_1}^{1a} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \eta_0 & Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) & -\operatorname{ch} \eta_0 & -Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) \\ \operatorname{sh} \eta_0 & Q_1'(\operatorname{ch} \eta_0) & -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{sh} \eta_0 & -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} Q_1'(\operatorname{ch} \eta_0) \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \eta_1 & Q_1(\operatorname{ch} \eta_1) \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \eta_1 & Q_1'(\operatorname{ch} \eta_1) \end{bmatrix}, \quad (81)$$

$$W_{C_1}^1 = E_0 a \sin \gamma W_{C_1}^{1a}, \quad (82)$$

$$W_{C_1}^{1a} = \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{ch} \eta_0 & -\operatorname{ch} \eta_0 & -Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) \\ 0 & \operatorname{sh} \eta_0 & -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{sh} \eta_0 & -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} Q_1'(\operatorname{ch} \eta_0) \\ -\operatorname{ch} \eta_1 & 0 & \operatorname{ch} \eta_1 & Q_1(\operatorname{ch} \eta_1) \\ -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{sh} \eta_1 & 0 & \operatorname{sh} \eta_1 & Q_1'(\operatorname{ch} \eta_1) \end{bmatrix}, \quad (83)$$

$$W_{D_1}^1 = E_0 a \sin \gamma W_{D_1}^{1a}, \quad (82)$$

$$W_{D_1}^{1a} = \begin{bmatrix} 0 & Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) & \operatorname{ch} \eta_0 & -Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) \\ 0 & Q_1'(\operatorname{ch} \eta_0) & \operatorname{sh} \eta_0 & -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} Q_1'(\operatorname{ch} \eta_0) \\ -\operatorname{ch} \eta_1 & 0 & 0 & Q_1(\operatorname{ch} \eta_1) \\ -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{sh} \eta_1 & 0 & 0 & Q_1'(\operatorname{ch} \eta_1) \end{bmatrix}, \quad (84)$$

$$W_{F_1}^1 = E_0 a \sin \gamma W_{F_1}^{1a}, \quad (85)$$

$$W_{F_1}^{1a} = \begin{bmatrix} 0 & Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) & -\operatorname{ch} \eta_0 & \operatorname{ch} \eta_0 \\ 0 & Q_1'(\operatorname{ch} \eta_0) & -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \operatorname{sh} \eta_0 & \operatorname{sh} \eta_0 \\ -\operatorname{ch} \eta_1 & 0 & \operatorname{ch} \eta_1 & 0 \\ -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{sh} \eta_1 & 0 & \operatorname{sh} \eta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

Funkcje  $Q_1$  i  $Q_1'$  są określone wzorami (22) i (23). Ostatecznie wyrażenia na potencjał w poszczególnych obszarach przyjmują postać:

$$V_0^I = K + E_0 a \sin \gamma \left[ -\operatorname{ch} \eta + \frac{W_{C_1}^{I_0}}{W_1} Q_1(\operatorname{ch} \eta) \right] \cos \theta, \quad (87)$$

$$V_1^I = K + E_0 a \sin \gamma \left[ \frac{W_{D_1}^{I_0}}{W_1} \operatorname{ch} \eta + \frac{W_{F_1}^{I_0}}{W_1} Q_1(\operatorname{ch} \eta) \right] \cos \theta, \quad (88)$$

$$V_2^I = K + E_0 z \frac{W_{A_1}^{I_0}}{W_1} \sin \gamma. \quad (89)$$

Z rozwiązania (89) wynika, że pole w wewnętrznej warstwie ziarniaka jest polem jednorodnym i ma tylko jedną składową „z” a więc skierowaną w kierunku przyłożonego pola.

Ponieważ w rozpatrywanym zagadnieniu występuje przypadek osiowosymetryczny, oraz  $g_{11} = g_{22} = a^2 (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)$ , więc na podstawie (35) natężenie pola opisuje wzór:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{a} (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \left[ \mathbf{1}_\eta \frac{\partial V}{\partial \eta} + \mathbf{1}_\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right]. \quad (90)$$

Z równania (87) otrzymano natężenie pola w dowolnym punkcie zewnętrznym:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0^I = & -\frac{1}{a} (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} E_0 a \sin \gamma \left\{ \mathbf{1}_\eta \left[ -\operatorname{sh} \eta + \frac{W_{C_1}^{I_0}}{W_1} Q_1'(\operatorname{ch} \eta) \right] \cos \theta - \right. \\ & \left. - \mathbf{1}_\theta \left[ -\operatorname{ch} \eta + \frac{W_{C_1}^{I_0}}{W_1} Q_1(\operatorname{ch} \eta) \right] (\sin \theta) \right\} = \mathbf{1}_\eta E_\eta + \mathbf{1}_\theta E_\theta. \end{aligned} \quad (91)$$

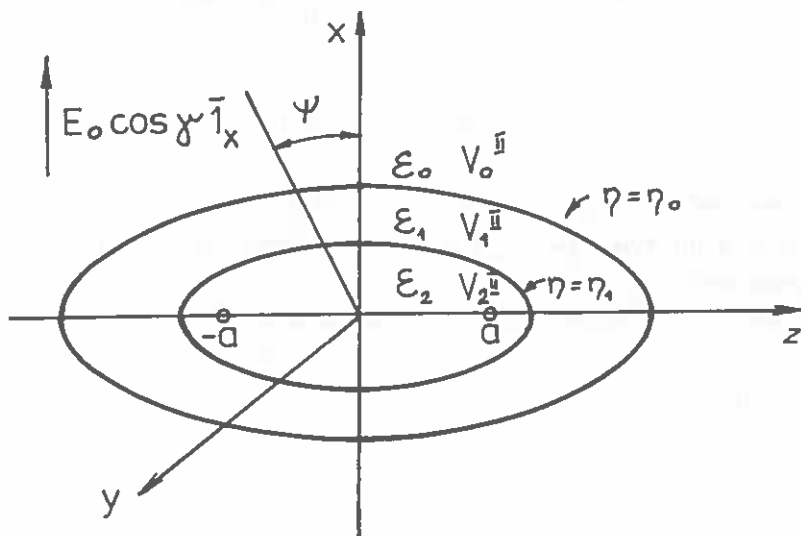
Analogicznie stwierdzono, że natężenie pola w obszarze „1” ziarniaka wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^I = & -\frac{1}{a} (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} E_0 a \sin \gamma \left\{ \mathbf{1}_\eta \left[ \frac{W_{D_1}^{I_0}}{W_1} \operatorname{sh} \eta + \frac{W_{F_1}^{I_0}}{W_1} \left( \frac{1}{2} \operatorname{sh} \eta \ln \frac{\operatorname{ch} \eta + 1}{\operatorname{ch} \eta - 1} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{cth} \eta \right) \right] \cos \theta + \mathbf{1}_\theta \left[ \frac{W_{D_1}^{I_0}}{W_1} \operatorname{ch} \eta + \frac{W_{F_1}^{I_0}}{W_1} Q_1(\operatorname{ch} \eta) \right] (-\sin \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (92)$$

W jego wnętrzu „2” można obliczyć natężenie różniczkując wyrażenie (89) względem „z”:

$$E_z^I = -1_z E_0 a \sin \gamma \frac{W_{A_1}^{I_0}}{W_1}. \quad (93)$$

## 7.2. Natężenie pola elektrycznego wywołane przez $E_0 \cos \gamma 1_z$ ,



Rys. 27. Krótsza oś ziarniaka pokrywa się z kierunkiem wektora natężenia pola.

Fig. 27. The shorter axis is parallel to field intensity vectors.

W przypadku sferoidy „leżącej” zagadnienie nie jest osiowosymetryczne. Rozkład potencjału, a więc i natężenie pola będzie funkcją trzech zmiennych niezależnych.

Na podstawie analogicznego rozumowania jak w punkcie 6.3, ostateczne rozwiązania równania Laplace’a określające rozkład potencjału w poszczególnych obszarach „leżącego” ziarniaka będą miały postać:

$$V_0^{II} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [B_{n,m}^{II} P_n^m(\text{ch}\eta) + C_{n,m}^{II} Q_n^m(\text{ch}\eta)] P_n^m(\cos\theta) \cos m\psi, \quad (94)$$

$$V_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [D_{n,m}'' P_n^m(\text{ch}\eta) + F_{n,m}'' Q_n^m(\text{ch}\eta)] P_n^m(\cos\theta) \cos m\psi, \quad (95)$$

$$V_2'' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{n,m}'' P_n^m(\text{ch}\eta) P_n^m(\cos\theta) \cos m\psi, \quad (96)$$

Przyjmuje się, że grubość ziarniaka w porównaniu do odległości między elektrodami jest tak mała, że pole w ich pobliżu jest praktycznie nie zniekształcone, wobec czego z warunku brzegowego w nieskończoności tj. dla  $\eta \rightarrow \infty$ :

$$V_0'' = -E_0 \cos \gamma \cdot x + K = -E_0 \cos \gamma a \text{sh}\eta \sin \theta \cos \psi + K. \quad (97)$$

Ponieważ w (97) występuje tylko wyraz z  $m = 1$ , więc w równaniach (94÷96) wystąpią również tylko wyrazy dla  $m = 1$ .

W wyniku tego i konieczności spełnienia warunku:  $0 \leq m \leq n$  [3] równanie (94) przyjmuje postać:

$$V_0'' = \sum_{n=1}^{\infty} [B_{n,1}'' P_n^1(\text{ch}\eta) + C_{n,1}'' Q_n^1(\text{ch}\eta)] P_n^1(\cos\theta) \cos \psi, \quad (98)$$

Na podstawie [3]:

$$P_1^1(\cos\theta) = \sin \theta. \quad (99)$$

Porównując (98), (97) i (99) stwierdzono, że powinno być:

$$P_n^1(\cos\theta) = \sin \theta = P_1^1(\cos\theta). \quad (100)$$

Stąd wynika, że

$$m = n = 1, \quad (101)$$

wobec czego równania (94÷96) otrzymują kształt:

$$V_0'' = V_0 + [B_1'' P_1^1(\text{ch}\eta) + C_1'' Q_1^1(\text{ch}\eta)] P_1^1(\cos\theta) \cos \psi, \quad (102)$$

$$V_1'' = V_0 + [D_1'' P_1^1(\text{ch}\eta) + F_1'' Q_1^1(\text{ch}\eta)] P_1^1(\cos\theta) \cos \psi, \quad (103)$$

$$V_2'' = V_0 + A_1'' P_1^1(\text{ch}\eta) P_1^1(\cos\theta) \cos \psi. \quad (104)$$

Na podstawie [3]:

$$P_1'(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_1(z)}{dz} \quad (105)$$

$$P_1(z) = z, \quad (106)$$

$$Q_1'(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{dQ_1}{dz} \quad (107)$$

$$Q_1(z) = \frac{1}{2} P_1(z) \ln \frac{z+1}{z-1} - 1. \quad (108)$$

Stąd uzyskano odpowiednio:

$$P_1'(\operatorname{ch}\eta) = \operatorname{sh}\eta, \quad (109)$$

$$Q_1'(\operatorname{ch}\eta) = \frac{1}{2} \operatorname{sh}\eta \ln \frac{\operatorname{ch}\eta + 1}{\operatorname{ch}\eta - 1} - \operatorname{cth}\eta. \quad (110)$$

Po uwzględnieniu zależności (109 ÷ 110), równania (102 ÷ 104) upraszczają się do postaci:

$$V_0'' = V_0 + [B_1'' \operatorname{sh}\eta + C_1'' Q_1'(\operatorname{ch}\eta)] \sin \theta \cos \psi, \quad (111)$$

$$V_1'' = V_0 + [D_1'' \operatorname{sh}\eta + F_1'' Q_1'(\operatorname{ch}\eta)] \sin \theta \cos \psi, \quad (112)$$

$$V_2'' = V_0 + A_1'' \operatorname{sh}\eta \sin \theta \cos \psi. \quad (113)$$

Stale współczynniki  $A_1''$ ,  $B_1''$ ,  $C_1''$ ,  $D_1''$ ,  $F_1''$  w równaniach (111 ÷ 113) wyznaczono analogicznie jak w p. 7.1, korzystając z warunków brzegowych:

- dla  $\eta \rightarrow \infty$ ,

$$V_0'' = -E_0 \cos \gamma \cdot x + V_0 = -E_0 \cos \gamma a \operatorname{sh}\eta \sin \theta \cos \psi + V_0, \quad (114)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} Q_1'(\operatorname{ch}\eta) = 0, \quad (115)$$

- dla  $\eta = \eta_1$

$$V_1'' = V_2'', \quad (116)$$

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{\partial V_1''}{\partial \eta} = \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial V_2''}{\partial \eta}, \quad (117)$$

– dla  $\eta = \eta_0$ ,

$$V_0'' = V_1'', \quad (118)$$

$$\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial V_0''}{\partial \eta} = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial V_1''}{\partial \eta}. \quad (119)$$

Poszukiwane współczynniki wyrażają się następująco:

$$A_1'' = \frac{W_{A_1}^{I_0}}{W_{II}}, \quad B_1'' = -E_0 \cos \gamma \cdot a, \quad C_1'' = \frac{W_{C_1}^{I_0}}{W_{II}}, \quad (120)$$

$$D_1'' = \frac{W_{D_1}^{I_0}}{W_{II}}, \quad F_1'' = \frac{W_{F_1}^{I_0}}{W_{II}}, \quad (121)$$

gdzie:

$$W_{II} = \begin{bmatrix} 0 & -Q_1(\text{ch}\eta_0) & \text{sh}\eta_0 & -Q_1'(\text{ch}\eta_0) \\ 0 & [Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' & \varepsilon_{w_1} \text{ch}\eta_0 & -\varepsilon_{w_1} [Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' \\ \text{sh}\eta_1 & 0 & -\text{sh}\eta_1 & -Q_1'(\text{ch}\eta_1) \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \text{ch}\eta_1 & 0 & -\text{ch}\eta_1 & -[Q_1'(\text{ch}\eta_1)]' \end{bmatrix}, \quad (122)$$

$$W_{A_1}^{I_0} = E_0 a \cos \gamma W_{A_1}^{I_0}, \quad (123)$$

$$W_{A_1}^{I_0} = \begin{bmatrix} -\text{sh}\eta_0 & -Q_1'(\text{ch}\eta_0) & \text{sh}\eta_0 & Q_1'(\text{ch}\eta_0) \\ \text{ch}\eta_0 & [Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' & -\varepsilon_{w_1} \text{ch}\eta_0 & -\varepsilon_{w_1} [Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' \\ 0 & 0 & -\text{sh}\eta_1 & -Q_1'(\text{ch}\eta_1) \\ 0 & 0 & -\text{ch}\eta_1 & -[Q_1'(\text{ch}\eta_1)]' \end{bmatrix}, \quad (124)$$

$$W_{C_1}^{I_0} = E_0 a \cos \gamma W_{C_1}^{I_0}, \quad (125)$$



$$W_{C_1}^{II_0} = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sh}\eta_0 & \text{sh}\eta_0 & Q_1'(\text{ch}\eta_0) \\ 0 & \text{ch}\eta_0 & -\varepsilon_{w_1}\text{ch}\eta_0 & -\varepsilon_{w_1}[Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' \\ \text{sh}\eta_1 & 0 & -\text{sh}\eta_1 & -Q_1'(\text{ch}\eta_1) \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\text{ch}\eta_1 & 0 & -\text{ch}\eta_1 & -[Q_1'(\text{ch}\eta_1)]' \end{bmatrix}, \quad (126)$$

$$W_{D_1}^{II} = E_0 a \cos \gamma W_{D_1}^{II_0}, \quad (127)$$

$$W_{D_1}^{II_0} = \begin{bmatrix} 0 & -Q_1'(\text{ch}\eta_0) & -\text{sh}\eta_0 & Q_1'(\text{ch}\eta_0) \\ 0 & [Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' & \text{ch}\eta_0 & -\varepsilon_{w_1}[Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' \\ \text{sh}\eta_1 & 0 & 0 & -Q_1'(\text{ch}\eta_1) \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\text{ch}\eta_1 & 0 & 0 & -[Q_1'(\text{ch}\eta_1)]' \end{bmatrix}, \quad (128)$$

$$W_{F_1}^{II} = E_0 a \cos \gamma W_{F_1}^{II_0}, \quad (129)$$

$$W_{F_1}^{II_0} = \begin{bmatrix} 0 & -Q_1'(\text{ch}\eta_0) & \text{sh}\eta_0 & -\text{sh}\eta_0 \\ 0 & [Q_1'(\text{ch}\eta_0)]' & -\varepsilon_{w_1}\text{ch}\eta_0 & \text{ch}\eta_0 \\ \text{sh}\eta_1 & 0 & -\text{sh}\eta_1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\text{ch}\eta_1 & 0 & -\text{ch}\eta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (130)$$

$$[Q_1'(\text{ch}\eta)]' = \frac{d[Q_1'(\text{ch}\eta)]}{d\eta} = \frac{1}{2}\text{ch}\eta \ln \frac{\text{ch}\eta + 1}{\text{ch}\eta - 1} + \text{cth}^2\eta - 2. \quad (131)$$

Ostatecznie potencjały w poszczególnych obszarach wyrażają się rozwiązaniami:

$$V_0^{II} = V_0 + E_0 a \cos \gamma \left[ -\text{sh}\eta + \frac{W_{C_1}^{II_0}}{W_{II}} Q_1'(\text{ch}\eta) \right] \sin \theta \cos \psi, \quad (132)$$

$$V_1^{II} = V_0 + E_0 a \cos \gamma \left[ \frac{W_{D_1}^{II_0}}{W_I} \text{sh}\eta + \frac{W_{F_1}^{II_0}}{W_{II}} Q_1'(\text{ch}\eta) \right] \sin \theta \cos \psi, \quad (133)$$

$$V_1'' = V_0 + E_0 \cos \gamma \frac{W_{A_1}''}{W_{II}} x. \quad (134)$$

Z rozwiązania (134) wynika, że wewnątrz ziarniaka w obszarze „2” pole jest jednorodne, równoległe do przyłożonego.

Natężenie pola w dowolnym punkcie zgodnie z (35) i (9) wynosi:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\frac{1}{a} (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{1}_\eta \frac{\partial V}{\partial \eta} + \mathbf{1}_\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) - \mathbf{1}_\psi \frac{1}{a \text{sh} \eta \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \psi} \quad (135)$$

Różniczkując odpowiednio wyrażenia na potencjały  $V_0''$ ,  $V_1''$  i  $V_2''$  (132 + 134) i wstawiając do (135) otrzymano poszukiwane natężenie pola na zewnątrz ziarniaka i w jego warstwach wewnętrznych:

$$\mathbf{E}_0'' = -\frac{1}{a} (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{1}_\eta \frac{\partial V_0''}{\partial \eta} + \mathbf{1}_\theta \frac{\partial V_0''}{\partial \theta} \right) - \mathbf{1}_\psi \frac{1}{a \text{sh} \eta \sin \theta} \frac{\partial V_0''}{\partial \psi}, \quad (136)$$

$$\mathbf{E}_1'' = -\frac{1}{a} (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{1}_\eta \frac{\partial V_1''}{\partial \eta} + \mathbf{1}_\theta \frac{\partial V_1''}{\partial \theta} \right) - \mathbf{1}_\psi \frac{1}{a \text{sh} \eta \sin \theta} \frac{\partial V_1''}{\partial \psi}, \quad (137)$$

$$\mathbf{E}_2'' = -E_0 \cos \gamma \frac{W_{A_1}''}{W_{II}} \mathbf{1}_x. \quad (138)$$

### 7.3. Transformacja wektorów natężenia pola

Natężenie zewnętrznego pola wymuszającego  $\mathbf{E}_0$  przedstawione jest we współrzędnych prostokątnych (x, y, z) i posiada tylko dwie składowe:

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{1}_x + E_0 \mathbf{1}_z. \quad (139)$$

Natomiast natężenie pola obliczane w ziarniaku zgodnie ze (135) posiada składowe  $\eta, \theta, \psi$ . Żeby można było obliczyć zmianę energii zgodnie z (43), obydwa wektory muszą być sprowadzone do tego samego układu współrzędnych np. do układu prostokątnego.

Składowe  $\mathbf{E}_k''$  i  $\mathbf{E}_k''$  (k - numer warstwy ziarniaka) obliczone są zgodnie z przyjętym układem, we współrzędnych sferoidy wydłużonej:

$$\mathbf{E} = \mathbf{1}_\eta E_\eta + \mathbf{1}_\theta E_\theta + \mathbf{1}_\psi E_\psi. \quad (140)$$

Przy przejściu z układu  $\eta, \theta, \psi$  do  $(x, y, z)$  otrzymano [42]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{1}_x &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x}{\partial \eta} E_\eta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial x}{\partial \theta} E_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial x}{\partial \psi} E_\psi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta}} \left[ \text{ch} \eta \sin \theta \cos \psi E_\eta + \text{sh} \eta \cos \theta \cos \psi E_\theta - \sin \psi E_\psi \right], \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{1}_z &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z}{\partial \eta} E_\eta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z}{\partial \theta} E_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial z}{\partial \psi} E_\psi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta}} \left[ \text{sh} \eta \cos \theta E_\eta - \text{ch} \eta \sin \theta E_\theta \right]. \end{aligned} \quad (142)$$

Wstawiając do wyrażeń (141) i (142) natężenie pola opisywane przez (92) obliczono odpowiednio ich składowe w układzie współrzędnych kartezjańskich:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{1}_z &= \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta}} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta}} E_0 \sin \gamma \left\{ \text{sh} \eta \cos \theta \left[ \frac{W_{D_1}^{1_0}}{W_1} \text{sh} \eta + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{W_{F_1}^{1_0}}{W_1} \left( \frac{1}{2} \text{sh} \eta \ln \frac{\text{ch} \eta + 1}{\text{ch} \eta - 1} - \text{cth} \eta \right) \right] \cos \theta - \text{ch} \eta \sin \theta \left[ \frac{W_{D_1}^{1_0}}{W_1} \text{ch} \eta + \right. \\ &\left. \left. + \frac{W_{F_1}^{1_0}}{W_1} Q_1(\text{ch} \eta) \right] (-\sin \theta) \right\}, \end{aligned} \quad (143)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^1 \cdot \mathbf{1}_x &= -\frac{1}{\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta} \cdot E_0 \sin \gamma \left\{ \text{ch} \eta \sin \theta \cos \psi \left[ \frac{W_{D_1}^{1_0}}{W_1} \text{sh} \eta + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{W_{F_1}^{1_0}}{W_1} \left( \frac{1}{2} \text{sh} \eta \ln \frac{\text{ch} \eta + 1}{\text{ch} \eta - 1} - \text{cth} \eta \right) \right] \cos \theta + \text{sh} \eta \cos \theta \cos \psi \left[ \frac{W_{D_1}^{1_0}}{W_1} \text{ch} \eta + \right. \\ &\left. \left. + \frac{W_{F_1}^{1_0}}{W_1} Q_1(\text{ch} \eta) \right] (-\sin \theta) \right\}, \end{aligned} \quad (144)$$

$$\mathbf{E}_1'' \cdot \mathbf{1}_z = E_0 \cos \gamma \frac{\sin \theta \cos \theta \cos \psi}{\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta} \left\{ \frac{W_{F_1}''}{W_{\parallel}} \left[ \frac{-dQ_1'(ch\eta)}{d\eta} Q_1'(ch\eta) \right] \right\}, \quad (145)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1'' \cdot \mathbf{1}_x = E_0 \cos \gamma & \left\{ \left\{ \frac{(-1)\cos^2 \psi}{\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta} \left\{ ch\eta \sin^2 \theta \left[ \frac{W_{D_1}''}{W_{\parallel}} ch\eta + \frac{W_{F_1}''}{W_{\parallel}} \frac{dQ_1'}{d\eta} \right] + \right. \right. \right. \\ & + \text{sh}\eta \cos^2 \theta \left[ \frac{W_{D_1}''}{W_{\parallel}} \text{sh}\eta + \frac{W_{F_1}''}{W_{\parallel}} Q_1'(ch\eta) \right] \left. \right\} - \frac{\sin^2 \psi}{\text{sh}\eta} \left[ \frac{W_{D_1}''}{W_{\parallel}} \text{sh}\eta + \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{W_{F_1}''}{W_{\parallel}} Q_1'(ch\eta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (146)$$

#### 7.4. Zmiana energii pola elektrostatycznego ziarniaka o budowie warstwowej

W przypadku ziarniaka warstwowego, obydwie warstwy będą wpływały na zmianę energii. Wykonując mnożenie skalarne wektorów  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{E}''$  i  $\mathbf{E}_0$  we współrzędnych kartezyjskich zgodnie z równaniem (43) otrzymuje się wyrażenie na zmianę energii wywołaną umieszczeniem ziarniaka w obszarze pola jednorodnego:

$$\begin{aligned} W = & -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_{G_1} (\mathbf{E}'_1 \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_1 \cdot \mathbf{E}_0) dG_1 - \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_{G_2} (\mathbf{E}'_2 \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_2 \cdot \mathbf{E}_0) dG_2. \end{aligned} \quad (147)$$

Oznaczając

$$W_{G_1} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_{G_1} (\mathbf{E}'_1 \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_1 \cdot \mathbf{E}_0) dG_1, \quad (148)$$

$$W_{G_2} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_{G_2} (\mathbf{E}'_2 \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_2 \cdot \mathbf{E}_0) dG_2, \quad (149)$$

otrzymano:

$$W = W_{G_1} + W_{G_2}, \quad (150)$$

gdzie:

$W_{G_1}$  - zmiana energii wywołana przez warstwę zewnętrzną ziarniaka (1),

$W_{G_2}$  - zmiana energii wywołana przez warstwę wewnętrzną ziarniaka (2),

$G_1$  - obszar warstwy zewnętrznej,

$G_2$  - obszar warstwy wewnętrznej.

Wstawiając do (148) i (149) wyrażenia na  $E_{1z}^I, E_{1x}^I, E_{1z}^{II}, E_{1x}^{II}, E_{2z}^I, E_{2x}^{II}, E_{0x},$  i  $E_{0z}$  opisane wzorami: (143), (144), (145), (146), (93), (138), (11) i (10) oraz pamiętając, że składowe  $E_{2x}^I$  i  $E_{2z}^{II}$  są równe zeru otrzymano:

$$W_{G_1} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_{\eta_1}^{\eta_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ E_{1x}^I E_0 \cos \gamma + E_{1x}^I E_0 \sin \gamma + E_{1x}^{II} E_0 \cos \gamma + \right. \\ \left. + E_{1z}^{II} E_0 \sin \gamma \right] dG_1 = \frac{1}{2}\pi\varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) E_0^2 a^3 \left[ \sin^2 \gamma \cdot K_{10} + \cos^2 \gamma \cdot K_{20} \right], \quad (151)$$

$$W_{G_2} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_{\eta_1}^{\eta_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ E_{2x}^I E_0 \cos \gamma + E_{2x}^I E_0 \sin \gamma + E_{2x}^{II} E_0 \cos \gamma + \right. \\ \left. + E_{2z}^{II} E_0 \sin \gamma \right] dG_2 = \frac{2}{3}\pi\varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) E_0^2 a^3 \operatorname{sh}^2 \eta_1 \operatorname{ch} \eta_1 \left[ \sin^2 \gamma \cdot \frac{W_{A_1}^{I_0}}{W_I} + \right. \\ \left. + \cos^2 \gamma \cdot \frac{W_{A_1}^{II_0}}{W_{II}} \right], \quad (152)$$

gdzie:

$$K_{10} = \frac{4}{3} \frac{W_{D_1}^{I_0}}{W_I} (\operatorname{sh}^2 \eta_0 \operatorname{ch} \eta_0 - \operatorname{sh}^2 \eta_1 \operatorname{ch} \eta_1) - 2 \cdot \frac{W_{F_1}^{I_0}}{W_I} (\operatorname{sh}^2 \eta_0 - \operatorname{sh}^2 \eta_1) + \\ + \frac{2}{3} \frac{W_{F_1}^{I_0}}{W_I} \left[ \operatorname{sh} \eta_0 \operatorname{sh} 2\eta_0 \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\eta_0}{2} \right) + \operatorname{ch}^2 \eta_0 - \operatorname{sh} \eta_1 \operatorname{sh} 2\eta_1 \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\eta_1}{2} \right) - \operatorname{ch} \eta_1 \right], \quad (153)$$

$$K_{20} = \frac{2}{3} \frac{W_{D_1}^{II_0}}{W_{II}} (\text{sh}\eta_0 \text{sh}2\eta_0 - \text{sh}\eta_1 \text{sh}2\eta_1) + \frac{W_{F_1}^{II_0}}{W_I} \left[ \text{ch}2\eta_1 - \text{ch}2\eta_0 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} (\text{ch}^2\eta_0 - \text{ch}^2\eta_1) + \frac{2}{3} \text{sh}\eta_0 \text{sh}2\eta_0 \ln \left( \text{cth} \frac{\eta_0}{2} \right) - \frac{2}{3} \text{sh}\eta_1 \text{sh}2\eta_1 \ln \left( \text{cth} \frac{\eta_1}{2} \right) \right]. \quad (154)$$

Końcowe wyrażenie na zmianę energii będące sumą oddziaływań obydwóch obszarów:  $W_{G_1}$  (151) i  $W_{G_2}$  (152) zgodnie z (150) ma kształt:

$$W = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 G E_0^2 \cdot K_{e_2}, \quad (155)$$

gdzie:

$G$  - objętość ziarniaka;

$K_{e_2}$  - funkcja uwzględniająca zmniejszenie energii pola w obszarze zajęтым przez ziarniak w zależności od: kąta nachylenia  $\gamma$  dłuższej osi ziarniaka do płaszczyzny elektrody, sferyczności  $B_w$ , względnej grubości warstw  $C_w$  i od przenikalności warstw  $\varepsilon_1$  oraz  $\varepsilon_2$ ;

$$K_{e_2} = -\frac{3}{4} \frac{(1 - B_w^2)^{\frac{3}{2}}}{B_w^2} \left\{ \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left[ \sin^2 \gamma \cdot K_{10} + \cos^2 \gamma \cdot K_{20} \right] - \right. \\ \left. - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{4}{3} \text{sh}^2 \eta_1 \text{ch} \eta_1 \left[ \sin^2 \gamma \frac{W_{I_1}^{II_0}}{W_I} + \cos^2 \gamma \frac{W_{II_1}^{II_0}}{W_{II}} \right] \right\}, \quad (156)$$

$$B_w = \frac{b_0}{c_0} = \text{th} \eta_0, \quad (157)$$

$$C_w = \frac{c_1}{c_0} = \frac{\text{ch}\eta_1}{\text{ch}\eta_0}, \quad (158)$$

$$\text{sh}\eta_0 = \frac{\text{th}\eta_0}{\sqrt{1 - \text{th}^2\eta_0}} = \frac{B_w}{\sqrt{1 - B_w^2}}, \quad (159)$$

$$\text{ch}\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2\eta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - B_w^2}}, \quad (160)$$

$$\text{ch}\eta_1 = C_w \text{ch}\eta_0 = \frac{C_w}{\sqrt{1 - B_w^2}}, \quad (161)$$

$$\text{sh}\eta_1 = \sqrt{\text{ch}^2\eta_1 - 1} = \sqrt{\frac{B_w^2 + C_w^2 - 1}{1 - B_w^2}}, \quad (162)$$

$$\text{cth}\eta_0 = \frac{1}{B_w}, \quad (163)$$

$$\text{cth}\eta_1 = \frac{C_w}{\sqrt{B_w^2 + C_w^2 - 1}}, \quad (164)$$

$$\text{sh}2\eta_0 = 2\text{sh}\eta_0 \text{ch}\eta_0 = \frac{2B_w}{1 - B_w^2}, \quad (165)$$

$$\text{cth} \frac{\eta_0}{2} = \frac{\text{sh}\eta_0}{\text{ch}\eta_0 - 1}, \quad (166)$$

$$\text{th} \frac{\eta_0}{2} = \frac{\text{sh}\eta_0}{\text{ch}\eta_0 + 1}, \quad (167)$$

$$\text{sh} 2\eta_1 = 2\text{sh}\eta_1 \text{ch}\eta_1, \quad (168)$$

$$\text{cth} \frac{\eta_1}{2} = \frac{\text{sh}\eta_1}{\text{ch}\eta_1 - 1}, \quad (169)$$

$$\operatorname{th} \frac{\eta_1}{2} = \frac{\operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} \eta_1 + 1}. \quad (170)$$

Zależność funkcji  $K_{\varepsilon_2}$  ze wzoru (155) od parametrów:  $\gamma, B_w, C_w, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  została stabelaryzowana numerycznie na maszynie cyfrowej, na podstawie (156). Wyniki obliczeń przedstawiono w tabelach 10 ÷ 15, a odpowiadające im krzywe na Rys. 28 ÷ 33.

Przy obliczeniach należy zwrócić uwagę na wzajemną zależność parametrów  $B_w$  i  $C_w$ . M. in. ze wzoru (164) wynika, że  $B_w^2 + C_w^2 - 1 > 0$  a tym samym wielkość  $C_w$  musi spełniać warunek:

$$C_w > \sqrt{1 - B_w^2}. \quad (171)$$

Graniczne wartości  $\sqrt{1 - B_w^2}$  zawiera Tabela 9.

Tabela 9. Wartości  $\sqrt{1 - B_w^2} = f(B_w)$

Table 9. Values  $\sqrt{1 - B_w^2} = f(B_w)$

$B_w$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	
$\sqrt{1 - B_w^2}$	1,0	0,994	0,979	0,953	0,916	
$B_w$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\sqrt{1 - B_w^2}$	0,8660	0,8	0,714	0,6	0,435	0



Tabela 10. Wartości funkcji  $K_{\varepsilon_2} = f(\gamma)$  dla wybranych wartości  $B_w$  i  $C_w$  przy

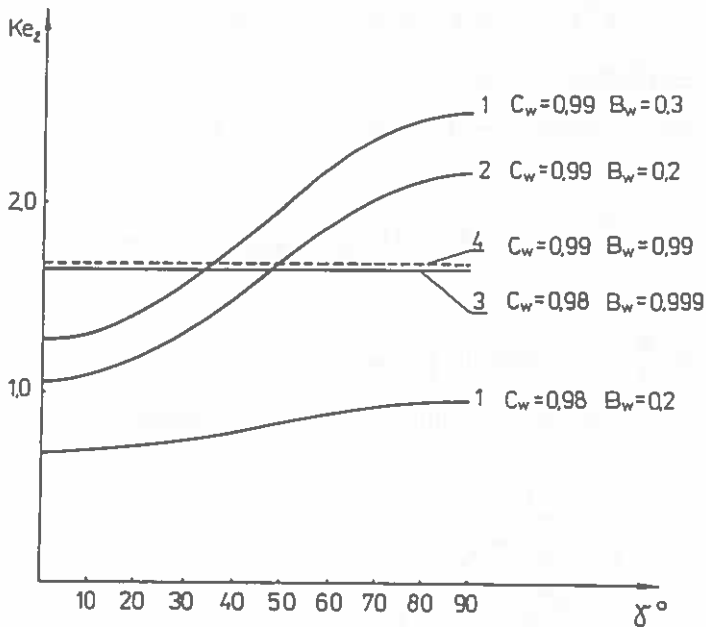
$$\varepsilon_{w_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 2; \varepsilon_{w_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} = 5$$

Table 10.  $K_{\varepsilon_2} = f(\gamma)$  values at selected  $B_w$  and  $C_w$  at  $\varepsilon_{w_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 2; \varepsilon_{w_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} = 5$

$\gamma [^\circ]$	$K_{\varepsilon_2}$			
	$B_w = 0,2$	$B_w = 0,2$	$B_w = 0,5$	$B_w = 0,5$
	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,99$	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,99$
0	$6,871 \cdot 10^{-1}$	1,052	1,380	1,444
15	$7,062 \cdot 10^{-1}$	1,127	1,431	1,498
30	$7,586 \cdot 10^{-1}$	1,333	1,571	1,646
45	$8,302 \cdot 10^{-1}$	1,614	1,761	1,848
60	$9,018 \cdot 10^{-1}$	1,895	1,951	2,049
75	$9,542 \cdot 10^{-1}$	2,101	2,090	2,197
90	$9,734 \cdot 10^{-1}$	2,176	2,141	2,251

Z analizy zależności  $K_{\varepsilon_2} = f(\gamma)$  przedstawionej w Tabeli 10 i na Rys. 28 przy zmiennych  $B_w$  oraz  $C_w$  wynika, że:

1. Funkcja  $K_{\varepsilon_2} = f(\gamma)$  w całym zakresie zmienności kąta  $\gamma$ , jest funkcją rosnącą wraz z kątem.
2. Przy kształcie ziarniaka zbliżonym do kuli ( $B_w = 0,99$ ) zmiana energii nie zależy od zmian kąta  $\gamma$  (krzywa 3 i 4) ani od zmian  $C_w$ .



Rys. 28. Zależność  $K_{e_2} = f(\gamma)$  przy różnych  $B_w$  i  $C_w$  dla  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$ .

Fig. 28. Dependence:  $K_{e_2} = f(\gamma)$  at different  $B_w$  and  $C_w$  for  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$ .

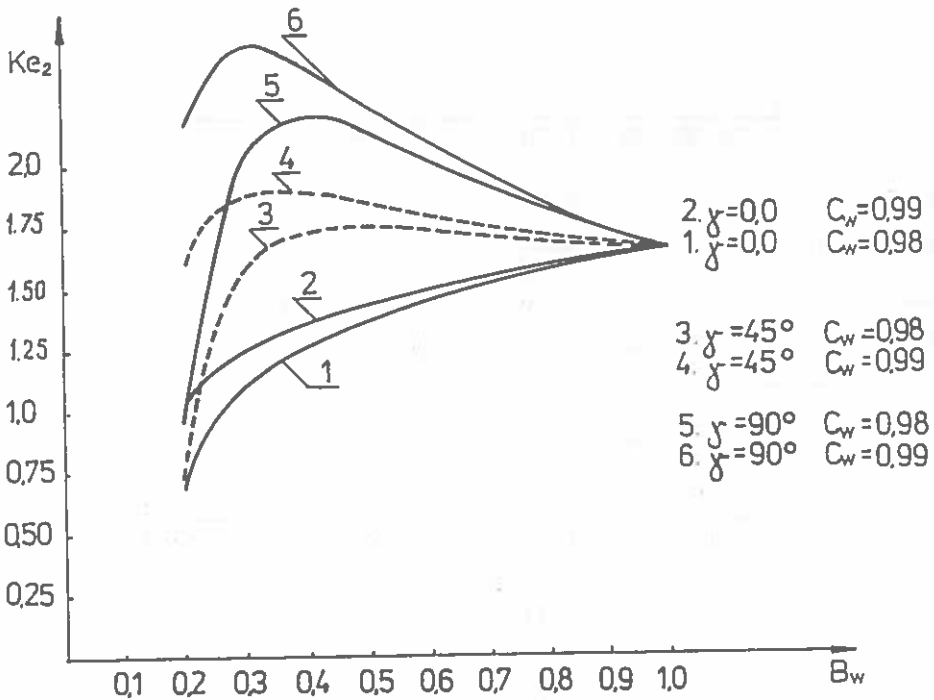
Tabela 11. Wartości funkcji  $K_{e_2} = f(B_w)$  dla wybranych wartości  $\gamma$  i  $C_w$  przy  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$

Table 11.  $K_{e_2} = f(B_w)$  values at selected  $\gamma$  and  $C_w$  at  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$

$B_w$	$K_{e_2}$			
	$\gamma = 0^\circ$		$\gamma = 45^\circ$	
	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,99$	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,99$
0,2	$6,871 \cdot 10^{-1}$	1,052	$8,302 \cdot 10^{-1}$	1,614
0,3	1,113	1,270	1,601	1,885
0,4	1,280	1,373	1,746	1,889
0,5	1,380	1,444	1,761	1,848
0,6	1,455	1,502	1,743	1,803
0,7	1,516	1,554	1,720	1,764
0,8	1,570	1,602	1,698	1,733
0,9	1,619	1,647	1,680	1,708
0,99	1,665	1,689	1,665	1,690

Z Tabeli 11 i Rys.29 przedstawiających zależności  $K_{e_2} = f(B_w)$  można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Przy kątach  $\gamma$  bliskich  $\frac{\pi}{2}$ , funkcja  $K_{e_2}$  silnie zależy od  $B_w$  i  $C_w$  (krzywe 5, 6).
2. Dla kątów  $\gamma > \frac{\pi}{4}$  funkcja  $K_{e_2} = f(B_w)$  osiąga wartość ekstremalną (max) dla  $B_w = 0,3 \div 0,4$ .
3. Dla kątów  $\frac{\pi}{4} > \gamma > 0$  funkcja  $K_{e_2}$  jest krzywą rosnącą.
4. Dla  $B_w > 0,7$  funkcja  $K_{e_2}$  w niewielkim stopniu zależy od  $C_w$ .



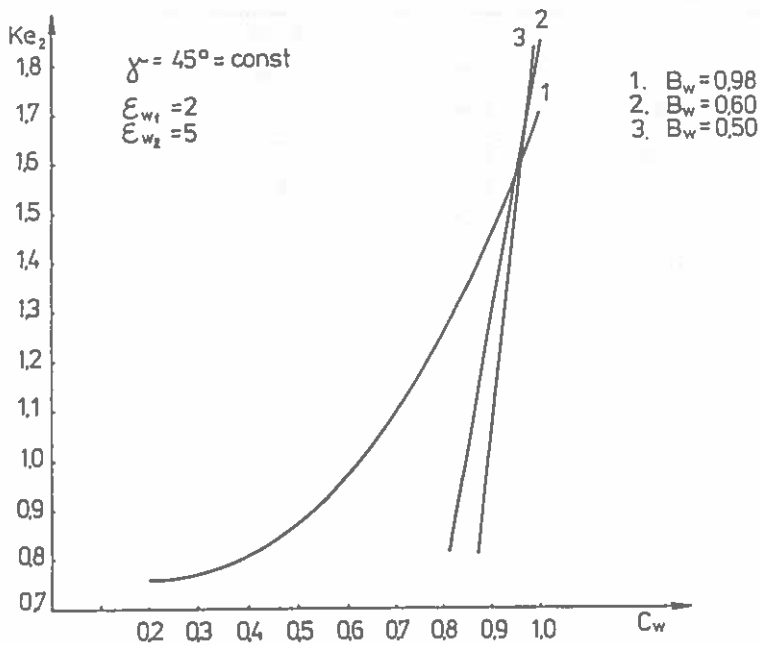
Rys. 29. Zależność  $K_{e_2} = f(B_w)$  przy różnych wartościach  $\gamma$  i  $C_w$  dla  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$ .

Fig. 29. Dependence:  $K_{e_2} = f(B_w)$  at different  $\gamma$  and  $C_w$  for  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$ .

Tabela 12. Wartości funkcji  $K_{e_2} = f(C_w)$  dla wybranych wartości  $B_w$  przy  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$  i  $\gamma = 45^\circ$

Table 12.  $K_{e_2} = f(C_w)$  values at selected  $B_w$  at  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$  and  $\gamma = 45^\circ$

$C_w$	$K_{e_2}$		$C_w$	$K_{e_2}$		$C_w$	$K_{e_2}$	
	$B_w = 0,98$			$B_w = 0,60$			$B_w = 0,50$	
0,2	$7,509 \cdot 10^{-1}$		0,81	$8,226 \cdot 10^{-1}$		0,87	$8,155 \cdot 10^{-1}$	
0,3	$7,689 \cdot 10^{-1}$		0,83	$9,230 \cdot 10^{-1}$		0,89	$9,892 \cdot 10^{-1}$	
0,4	$8,074 \cdot 10^{-1}$		0,85	1,025		0,91	1,160	
0,5	$8,728 \cdot 10^{-1}$		0,87	1,128		0,93	1,331	
0,6	$9,700 \cdot 10^{-1}$		0,89	1,235		0,95	1,502	
0,7	1,103		0,91	1,343		0,96	1,588	
0,8	1,272		0,93	1,455		0,97	1,674	
0,9	1,478		0,95	1,569		0,98	1,761	
1,0	1,718		0,97	1,685		0,99	1,848	
			1,00	1,862		1,00	1,934	



Rys. 30. Zależność  $K_{e_2} = f(C_w)$  przy różnych  $B_w$ .

Fig. 30. Dependence:  $K_{e_2} = f(C_w)$  at different  $B_w$ .

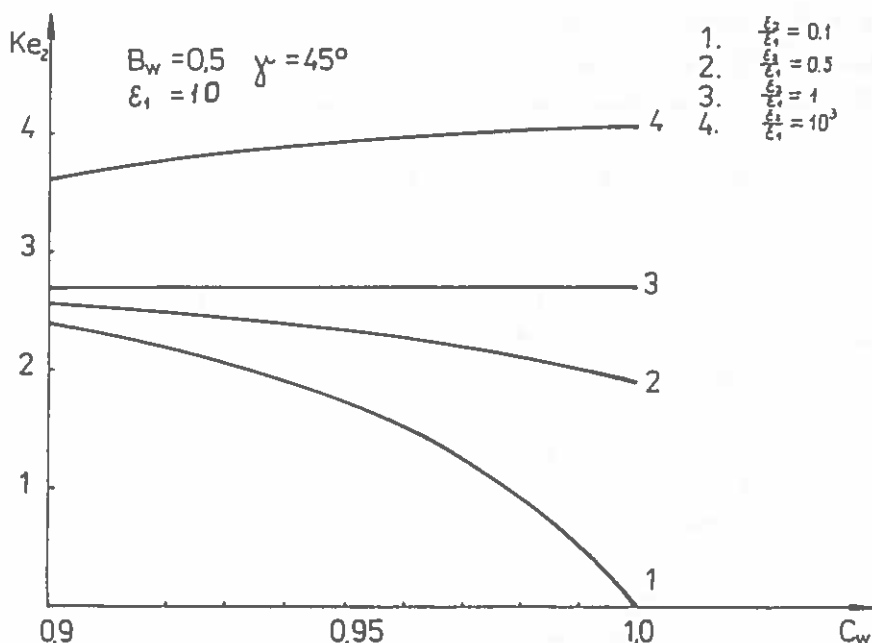
Z Tabeli 12 i Rys. 30 wynika, że:

1. Wzrost współczynnika  $C_w$  (co odpowiada względnemu wzrostowi objętości obszaru wewnętrznego ziarniaka, dla którego założono większą przenikalność niż dla warstwy okrywowej) wywołuje paraboliczny wzrost funkcji  $K_{\epsilon_2}$  w ziarniakach o kształcie zbliżonym do kuli, o dużym współczynniku sferyczności.
2. Dla ziarniaków o kształcie wydłużonym ( $B_w < 0,6$ ) moment orientacji silnie i niemalże liniowo zależy od  $C_w$ .

Tabela 13. Wartości  $K_{\epsilon_2} = f(C_w)$  przy różnych przenikalnościach  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  dla  $B_w = 0,5$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  $\epsilon_1 = 10$

Table 13.  $K_{\epsilon_2} = f(C_w)$  values at different permittivity  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  for  $B_w = 0,5$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  $\epsilon_1 = 10$

$C_w$	$K_{\epsilon_2}$			
	$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 0,1$	$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 0,5$	$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 10$	$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 10^3$
0,90	2,433	2,585	3,323	3,645
0,92	2,223	2,495	3,496	3,772
0,94	1,930	2,389	3,628	3,873
0,96	1,526	2,263	3,736	3,957
0,98	9,371	2,114	3,826	4,028
0,99	$5,290 \cdot 10^{-1}$	2,029	3,866	4,059
1,0	$2,947 \cdot 10^{-11}$	1,934	3,903	4,089



Rys. 31. Zależność  $K_{\epsilon_2} = f(C_w)$  przy różnych przenikalnościach warstwy wewnętrznej  $G_2$ .

Fig. 31. Dependence:  $K_{\epsilon_2} = f(C_w)$  at different permittivity of inner layer ( $G_2$ ).

Wyniki podane w Tabeli 13 uzyskane dla różnych wartości wzajemnej przenikalności elektrycznej obszarów  $G_1$  i  $G_2$  oraz przedstawione na Rys. 31 wskazują że:

1. Czynnikiem decydującym o charakterze przebiegu funkcji  $K_{\epsilon_2}$  jest wzajemny stosunek ich przenikalności elektrycznej  $\epsilon_2 / \epsilon_1$ .
2. Wzrost przenikalności elektrycznej warstwy wewnętrznej  $G_2$ , ( $\epsilon_2 / \epsilon_1 > 1$ ) powoduje przy wzroście  $C_w$  liniowy wzrost funkcji  $K_{\epsilon_2}$ , a więc i momentu orientacji.
3. Przy spadku przenikalności elektrycznej warstwy wewnętrznej, ( $\epsilon_2 / \epsilon_1 < 1$ ) wartość funkcji  $K_{\epsilon_2}$  maleje wraz ze wzrostem  $C_w$ .
4. Dla  $\epsilon_2 / \epsilon_1 = 1$  wartość funkcji  $K_{\epsilon_2}$  nie zależy od zmian  $C_w$ .

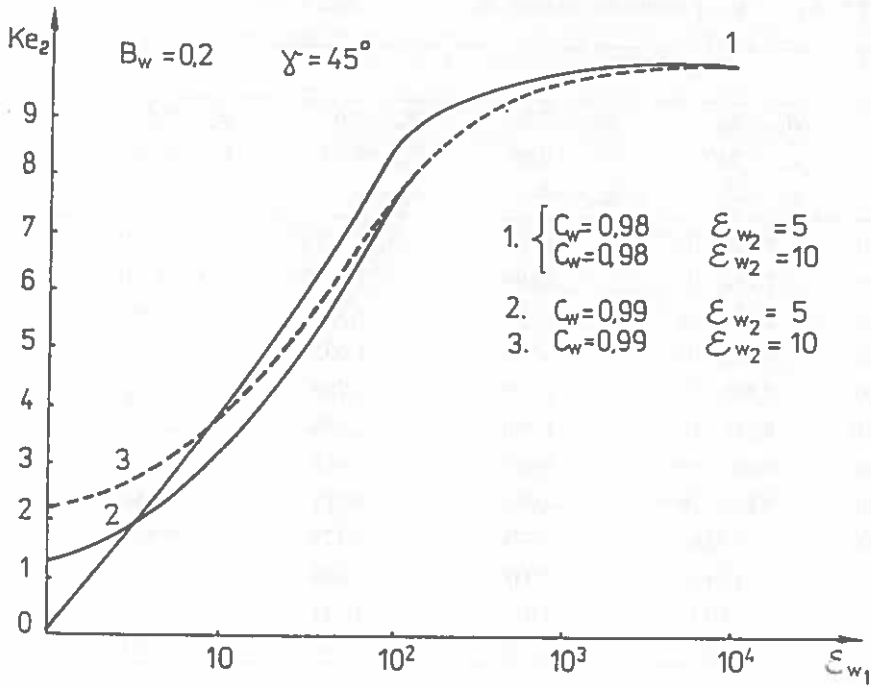
Tabela 14. Wartości funkcji  $K_{e_2} = f(\varepsilon_{w_1})$  przy wybranych wartościach  $B_w$ ,  $C_w$ ,  $\varepsilon_{w_2}$  i  $\gamma = 45^\circ$ Table 14.  $K_{e_2} = f(C_w)$  values at selected  $B_w$ ,  $C_w$ ,  $\varepsilon_{w_2}$  and  $\gamma = 45^\circ$ 

$\varepsilon_{w_1}$	$K_{e_2}$			
	$B_w = 0,2$	$B_w = 0,2$	$B_w = 0,2$	$B_w = 0,3$
	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,99$	$C_w = 0,96$
	$\varepsilon_{w_2} = 5$	$\varepsilon_{w_2} = 10$	$\varepsilon_{w_2} = 5$	$\varepsilon_{w_2} = 5$
1,0	$2,602 \cdot 10^{-2}$	$5,154 \cdot 10^{-2}$	1,213	$3,095 \cdot 10^{-1}$
5,0	2,327	2,346	2,327	2,160
10,0	3,841	3,853	3,174	3,199
50,0	7,558	7,560	6,301	5,269
$10^2$	8,610	8,611	7,645	5,755
$10^3$	9,855	9,855	9,700	6,283
$10^4$	10,000	10,000	9,984	6,342

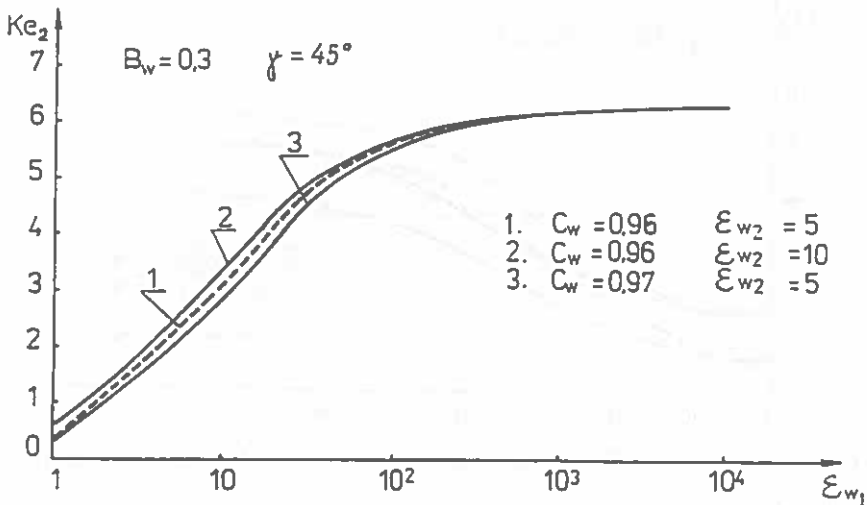
Z Tabeli 14 i Rys. 32 wynika, że:

1. Przy wzroście smukłości ziarniaka ( $B_w \rightarrow 0$ ) funkcja  $K_{e_2}$  rośnie wraz ze wzrostem  $\varepsilon_{w_1}$ . Ten wzrost nie jest proporcjonalny do wzrostu  $\varepsilon_{w_1}$ ; dla  $\varepsilon_{w_1} \rightarrow \infty$  krzywa  $K_{e_2}$  ulega „nasyceciu”.
2. Zmiany  $\varepsilon_{w_2}$  przy zachowaniu stałej wartości  $C_w$  prawie nie wywierają wpływu na funkcję  $K_{e_2}$ .

a)



b)



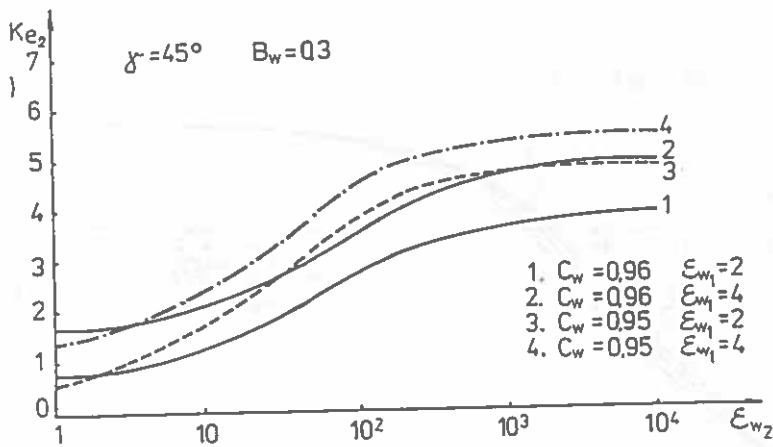
Rys. 32. Zależność  $K_{e_2} = f(\varepsilon_{w_1})$  przy różnych  $C_w$  i  $\varepsilon_{w_2}$ ; a) dla  $B_w = 0,2$ ; b) dla  $B_w = 0,3$ .

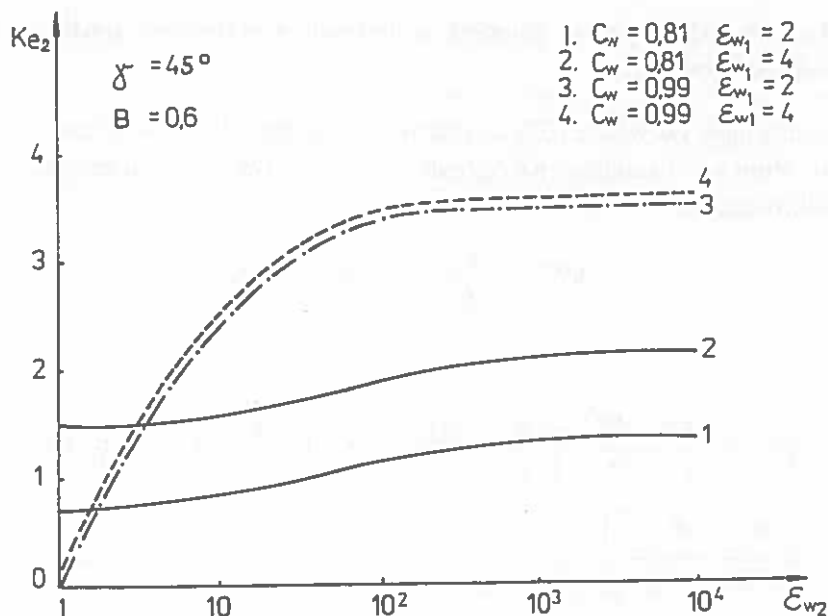
Fig. 32. Dependence:  $K_{e_2} = f(\varepsilon_{w_1})$  at different  $C_w$  i  $\varepsilon_{w_2}$ ; a) for  $B_w = 0,2$ ; b) for  $B_w = 0,3$ .



Tabela 15. Wartości funkcji  $K_{\epsilon_2} = f(\epsilon_{w_2})$  przy wybranych wartościach  $B_w$ ,  $C_w$ ,  $\epsilon_{w_1}$  i  $\gamma = 45^\circ$ Table 15.  $K_{\epsilon_2} = f(\epsilon_{w_2})$  values for selected  $B_w$ ,  $C_w$ ,  $\epsilon_{w_1}$  and  $\gamma = 45^\circ$ 

$\epsilon_{w_2}$	$K_{\epsilon_2}$			
	$B_w = 0,2$	$B_w = 0,2$	$B_w = 0,6$	$B_w = 0,6$
	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,99$	$C_w = 0,99$
	$\epsilon_{w_1} = 2$	$\epsilon_{w_1} = 4$	$\epsilon_{w_1} = 2$	$\epsilon_{w_1} = 4$
1,0	$8,058 \cdot 10^{-1}$	1,891	$5,503 \cdot 10^{-2}$	$3,095 \cdot 10^{-1}$
2,0	$8,132 \cdot 10^{-1}$	1,896	$7,717 \cdot 10^{-1}$	$3,095 \cdot 10^{-1}$
4,0	$8,250 \cdot 10^{-1}$	1,906	1,559	1,607
6,0	$8,352 \cdot 10^{-1}$	1,914	1,992	2,034
8,0	$8,449 \cdot 10^{-1}$	1,922	2,268	<u>2,309</u>
10,0	$8,541 \cdot 10^{-1}$	1,930	2,460	2,501
20,0	$8,983 \cdot 10^{-1}$	1,967	2,925	2,967
40,0	$9,824 \cdot 10^{-1}$	2,037	3,211	3,256
80,0	1,140	2,171	3,371	3,418
$10^2$	1,215	2,235	3,405	3,453
$10^3$	3,027	4,015	3,531	3,581
$10^4$	4,849	6,376	3,544	3,594

Rys. 33.a. Zależność  $K_{\epsilon_2} = f(\epsilon_{w_2})$  przy różnych przenikalnościach warstwy wewnętrznej  $G_2$  i przy różnych  $C_w$ .Fig. 33.a. Dependence:  $K_{\epsilon_2} = f(\epsilon_{w_2})$  at different permittivity of inner layer ( $G_2$ ) and  $C_w$ .



Rys. 33.b. Zależność  $K_{e_2} = f(\epsilon_{w_2})$  przy różnych przenikalnościach warstwy wewnętrznej  $G_2$  i przy różnych  $C_w$ .

Fig. 33.b. Dependence:  $K_{e_2} = f(\epsilon_{w_2})$  at different permittivity of inner layer ( $G_2$ ) and  $C_w$ .

Przebieg zależności  $K_{e_2} = f(\epsilon_{w_2})$  jest analogiczny do przebiegu  $K_{e_2} = f(\epsilon_{w_1})$ :

1. Funkcja  $K_{e_2}$  rośnie wraz ze wzrostem  $\epsilon_{w_2}$ , przy czym „tempo” wzrostu maleje przy wzroście  $\epsilon_{w_2}$  powyżej wartości  $10^2$ .
2. Dla wartości  $\epsilon_{w_2} \rightarrow \infty$ , funkcja  $K_{e_2}$  osiąga wartość skończoną zależną dość mocno od  $B_w$  a mniej od  $C_w$  i  $\epsilon_{w_1}$ .

### 7.5. Moment działający na ziarniak o budowie warstwowej umieszczony w polu elektrostatycznym

Podstawiając do wzoru (62) wyrażenie na energię (155), otrzymano wzór na moment obrotowy działający na ziarniak o budowie warstwowej, umieszczony w polu elektrycznym:

$$M_e^{(2)} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 G E_0^2 \cdot \Phi^{(2)} \cdot \sin 2\gamma \quad (172)$$

gdzie:

$$\Phi^{(2)} = -\frac{3}{4} \frac{(1 - B_w^2)^{\frac{3}{2}}}{B_w^2} \left\{ \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) (K_{10} - K_{20}) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{4}{3} \operatorname{sh}^2 \eta_1 \operatorname{ch} \eta_1 \cdot \left( \frac{W_{\perp 1}^{10}}{W_{\perp 1}} - \frac{W_{\perp 1}^{10}}{W_{\parallel 11}} \right) \right\} \quad (173)$$

Funkcja  $\Phi^{(2)}$  charakteryzuje wpływ kształtu ziarniaka  $B_w$  na wielkość momentu obrotowego wywołanego działaniem pola elektrycznego, zależnie od grubości warstw  $C_w$  i przenikalności elektrycznej poszczególnych warstw  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ .

Wielkość  $\Phi^{(2)} = f(B_w, C_w, \varepsilon_{w_1}, \varepsilon_{w_2})$  stabilaryzowano na maszynie cyfrowej.

Wyniki przedstawiono w Tabelach 16 + 20 oraz na wykresach 34 + 38.

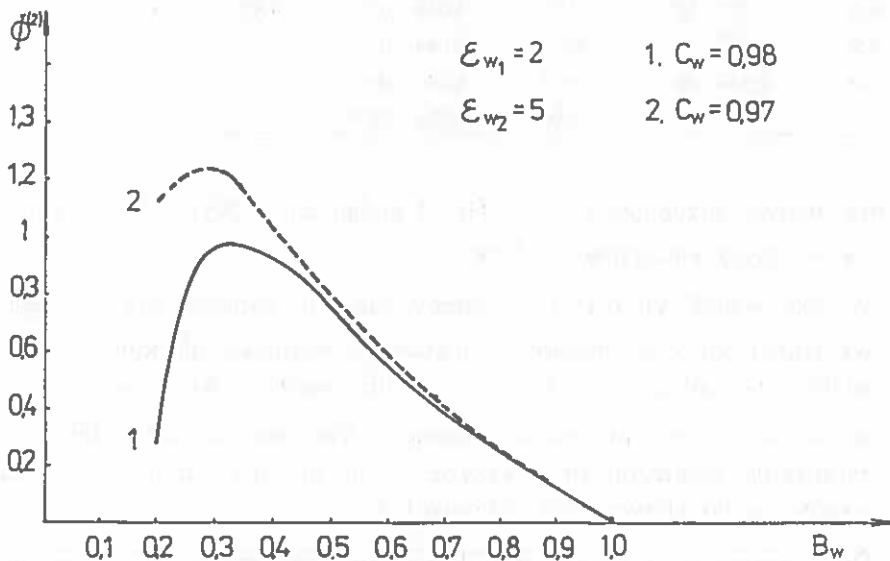
Tabela 16. Wartości funkcji  $\Phi^{(2)} = f(B_w)$  dla wybranych wartości  $C_w$  przy  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$

Table 16.  $\Phi^{(2)} = f(B_w)$  values for selected  $C_w$  at  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$

$B_w$	$\Phi^{(2)}$	
	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,99$
0,2	$2,864 \cdot 10^{-1}$	1,125
0,3	$9,775 \cdot 10^{-1}$	1,230
0,4	$9,322 \cdot 10^{-1}$	1,033
0,5	$7,609 \cdot 10^{-1}$	$8,072 \cdot 10^{-1}$
0,6	$5,776 \cdot 10^{-1}$	$6,007 \cdot 10^{-1}$
0,7	$4,078 \cdot 10^{-1}$	$4,195 \cdot 10^{-1}$
0,8	$2,558 \cdot 10^{-1}$	$2,615 \cdot 10^{-1}$
0,9	$1,206 \cdot 10^{-1}$	$1,228 \cdot 10^{-1}$
0,99	$1,142 \cdot 10^{-3}$	$1,159 \cdot 10^{-3}$

Analiza funkcji  $\Phi^{(2)} = f(B_w)$  przedstawionej w Tabeli 16 i na Rys. 34 prowadzi do następujących wniosków:

1. Moment działający na ziarniak silnie zależy od jego sferyczności.
2. W ziarniaku o budowie warstwowej moment nań działający posiada ekstremum (max) przy współczynniku sferyczności  $B_w \approx 0,3$ , gdy tymczasem w ziarniaku jednorodnym moment w całym zakresie zmienności  $B_w$  jest funkcją malejącą o przebiegu zbliżonym do hiperboli (p. Rys. 25).
3. Wartość momentu w ziarniakach o małym współczynniku sferyczności ( $B_w < 0,35$ ) w dużym stopniu zależy od względnej grubości poszczególnych warstw  $C_w$  różniących się przenikalnością elektryczną.



Rys. 34. Wpływ sferyczności ziarniaka na wartość momentu obrotowego oddziaływującego na niego w polu elektrycznym.

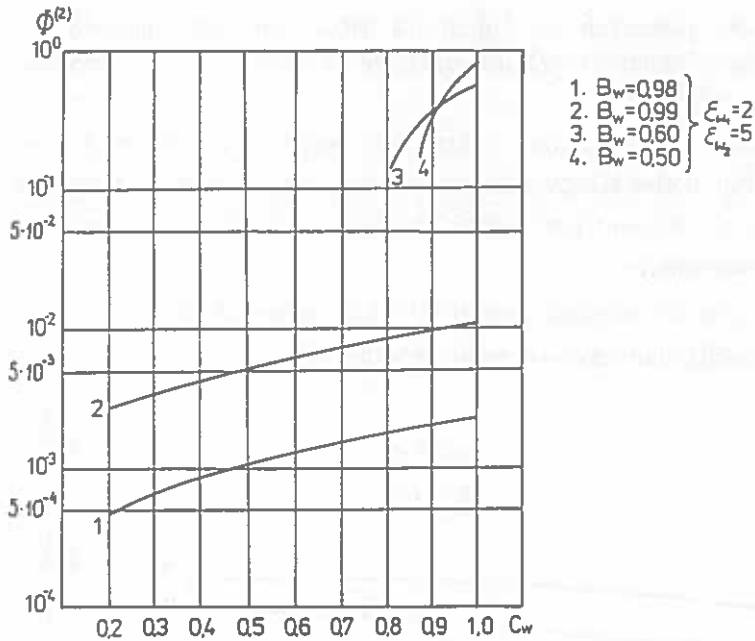
Fig. 34. The influence of grain spherical geometry on torque from electric field.

Tabela 17. Wartości funkcji  $\phi^{(2)} = f(C_w)$  dla wybranych wartości  $B_w$  przy  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$ Table 17.  $\phi^{(2)} = f(C_w)$  values at selected  $B_w$  for  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ;  $\varepsilon_{w_2} = 5$ 

$C_w$	$\phi^{(2)}$	$C_w$	$\phi^{(2)}$	$C_w$	$\phi^{(2)}$
	$B_w = 0,98$		$B_w = 0,60$		$C_w = 0,50$
0,2	$4,598 \cdot 10^{-3}$	0,81	$1,469 \cdot 10^{-1}$	0,87	$1,744 \cdot 10^{-1}$
0,3	$6,788 \cdot 10^{-3}$	0,83	$2,100 \cdot 10^{-1}$	0,89	$3,041 \cdot 10^{-1}$
0,4	$8,381 \cdot 10^{-3}$	0,85	$2,658 \cdot 10^{-1}$	0,91	$4,167 \cdot 10^{-1}$
0,5	$1,013 \cdot 10^{-2}$	0,87	$3,176 \cdot 10^{-1}$	0,93	$5,205 \cdot 10^{-1}$
0,6	$1,216 \cdot 10^{-2}$	0,89	$3,670 \cdot 10^{-1}$	0,95	$6,190 \cdot 10^{-1}$
0,7	$1,451 \cdot 10^{-2}$	0,91	$4,149 \cdot 10^{-1}$	0,97	$7,142 \cdot 10^{-1}$
0,8	$1,723 \cdot 10^{-2}$	0,93	$4,619 \cdot 10^{-1}$	1,00	$8,531 \cdot 10^{-1}$
0,9	$2,032 \cdot 10^{-2}$	0,95	$5,084 \cdot 10^{-1}$		
1,0	$2,379 \cdot 10^{-2}$	0,97	$5,546 \cdot 10^{-1}$		
		1,00	$6,238 \cdot 10^{-1}$		

Z otrzymanych przebiegów  $\phi^{(2)} = f(C_w)$  podanych na Rys. 35 i w Tabeli 17 można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Wzrost współczynnika  $C_w$  (odpowiada on jednocześnie względnemu wzrostowi objętości obszaru wewnętrznego ziarniaka, dla którego założono większą przenikalność –  $\varepsilon_{w_2} = 5$ , niż dla warstwy okrywowej –  $\varepsilon_{w_1} = 2$ ) wywołuje wzrost momentu orientacji. Ten wzrost jest silniejszy dla ziarniaków wydłużonych – krzywe 3, 4; niż dla ziarniaków o dużym współczynniku sferyczności – krzywe 1, 2.
2. Dla ziarniaków o dużym współczynniku sferyczności ( $B_w > 0,6$ ) wzrost momentu następuje niemalże liniowo wraz ze wzrostem  $C_w$  - krzywe 1, 2.



Rys. 35. Zależność  $\phi^{(2)} = f(C_w)$  przy różnych  $B_w$  i ustalonych przenikalnościach elektrycznych warstw:  $\epsilon_{w1} = 2$ ;  $\epsilon_{w2} = 5$ .

Fig. 35. Dependence:  $\phi^{(2)} = f(C_w)$  at different  $B_w$  and established electric permittivity of layers  $\epsilon_{w1} = 2$ ;  $\epsilon_{w2} = 5$ .

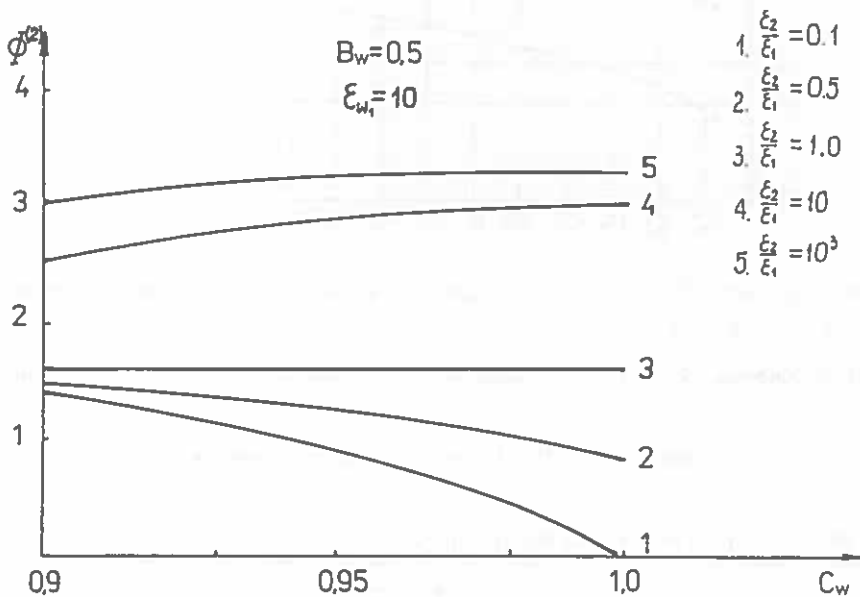
Tabela 18. Wartości funkcji  $\phi^{(2)} = f(C_w)$  przy różnych przenikalnościach  $\epsilon_2/\epsilon_1$  dla  $B_w = 0,5$  i  $\epsilon_{w1} = 10$

Table 18.  $\phi^{(2)} = f(C_w)$  values at different permittivity  $\epsilon_2/\epsilon_1$  for  $B_w = 0,5$  and  $\epsilon_{w1} = 10$

$C_w$	$\phi^{(2)}$			
	$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 0,1$	$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 0,5$	$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 1$	$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 10^3$
0,90	1,422	1,491	1,606	3,128
0,92	1,265	1,404	1,606	3,207
0,94	1,061	1,301	1,606	3,256
0,96	$7,948 \cdot 10^{-1}$	1,179	1,606	3,291
0,98	$4,459 \cdot 10^{-1}$	1,031	1,606	3,317
0,99	$2,345 \cdot 10^{-1}$	$9,466 \cdot 10^{-1}$	1,606	3,328
1,0	$5,894 \cdot 10^{-11}$	$8,531 \cdot 10^{-1}$	1,606	3,339

Z wyników podanych w Tabeli 18 (Rys. 36) otrzymanych dla różnych przenikalności elektrycznych poszczególnych warstw  $G_1$  i  $G_2$  można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Stosunek przenikalności elektrycznej warstwy zewnętrznej i wewnętrznej decyduje o charakterze przebiegu funkcji  $\phi^{(2)}$  a zatem i momentu  $M_e$ . Dla  $\epsilon_2/\epsilon_1 > 1$  moment jest funkcją rosnącą a dla  $\epsilon_2/\epsilon_1 < 1$  malejącą w całym zakresie zmian  $C_w$ .
2. Dla  $\epsilon_2/\epsilon_1 = 1$  wartość funkcji  $\phi^{(2)}$  nie zależy od zmian  $C_w$ . Ten przypadek odpowiada ziarniakowi o budowie jednorodnej.



Rys. 36. Zależność  $\phi^{(2)} = f(C_w)$  przy różnych przenikalnościach elektrycznych warstwy wewnętrznej  $G_2$ .

Fig. 36. Dependence:  $\phi^{(2)} = f(C_w)$  at different electric permittivity of inner layer ( $G_2$ ).

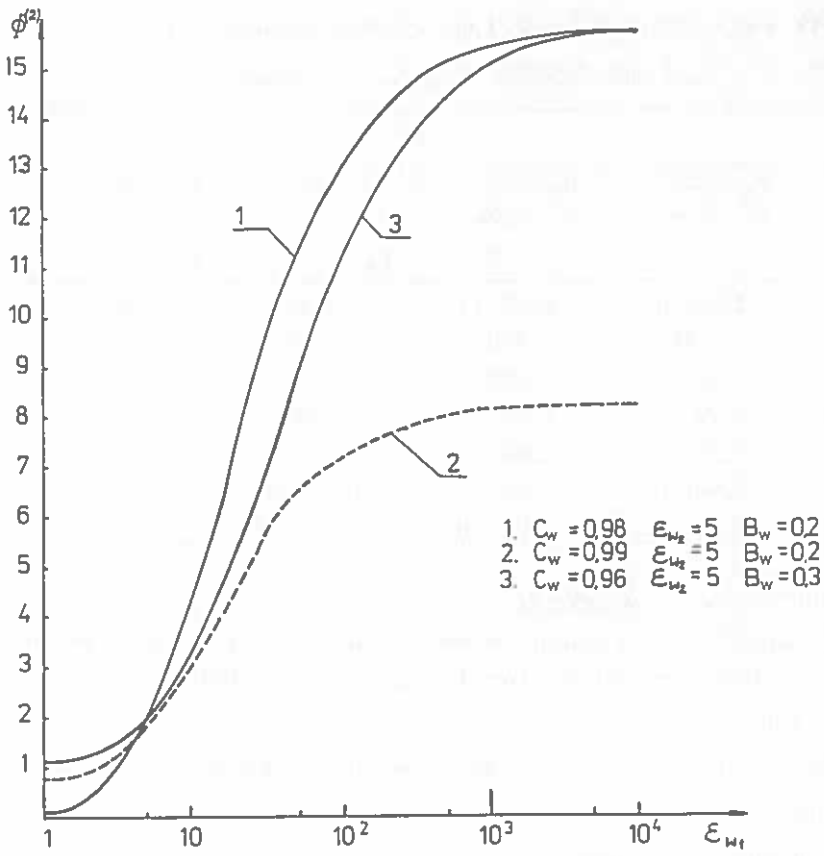
Tabela 19. Wartości funkcji  $\phi^{(2)} = f(\varepsilon_{w_1})$  przy wybranych wartościach  $B_w$ ,  $C_w$  i  $\varepsilon_{w_2}$ Table 19.  $\phi^{(2)} = f(\varepsilon_{w_1})$  values at selected values  $B_w$ ,  $C_w$  and  $\varepsilon_{w_2}$ 

$\varepsilon_{w_1}$	$\phi^{(2)}$			
	$B_w = 0,2$ $C_w = 0,98$ $\varepsilon_{w_2} = 5$	$B_w = 0,2$ $C_w = 0,98$ $\varepsilon_{w_2} = 10$	$B_w = 0,2$ $C_w = 0,99$ $\varepsilon_{w_2} = 5$	$B_w = 0,2$ $C_w = 0,99$ $\varepsilon_{w_2} = 10$
1	$2,589 \cdot 10^{-2}$	$7,097 \cdot 10^{-2}$	1,068	2,573
5	1,885	1,914	1,885	3,188
10	4,256	4,276	3,195	4,276
50	$1,106 \cdot 10^{-1}$	$1,106 \cdot 10^{-1}$	8,767	9,125
$10^2$	$1,307 \cdot 10^1$	$1,308 \cdot 10^1$	$1,128 \cdot 10^1$	$1,143 \cdot 10^1$
$10^3$	$1,548 \cdot 10^1$	$1,548 \cdot 10^1$	$1,519 \cdot 10^1$	$1,519 \cdot 10^1$
$10^4$	$1,576 \cdot 10^1$	$1,576 \cdot 10^1$	$1,573 \cdot 10^1$	$1,573 \cdot 10^1$

Z Tabeli 19 i Rys. 37 wynika, że:

1. Funkcja  $\phi^{(2)}$  a tym samym i moment rośnie wraz ze wzrostem przenikalności  $\varepsilon_{w_1}$  warstwy zewnętrznej. Najsilniejszy wzrost występuje w przedziale  $\varepsilon_{w_1} = 4 \div 100$ .
2. Dla  $\varepsilon_{w_1} > 10^3$  krzywa  $\phi^{(2)}$  ulega „nasyceciu” i moment w niewielkim stopniu zależy od zmian  $\varepsilon_{w_1}$ .
3. W obrębie małych wartości  $\varepsilon_{w_1}$  ( $\varepsilon_{w_1} < 5$ ) oraz dużych ( $\varepsilon_{w_1} > 10^3$ ) duży wpływ na wartość momentu wywiera współczynnik sferyczności ziarniaka.





Rys. 37. Zależność  $\phi^{(2)} = f(\epsilon_{w_1})$  dla wybranych wartości  $B_w$ ,  $C_w$  i  $\epsilon_{w_2}$ .

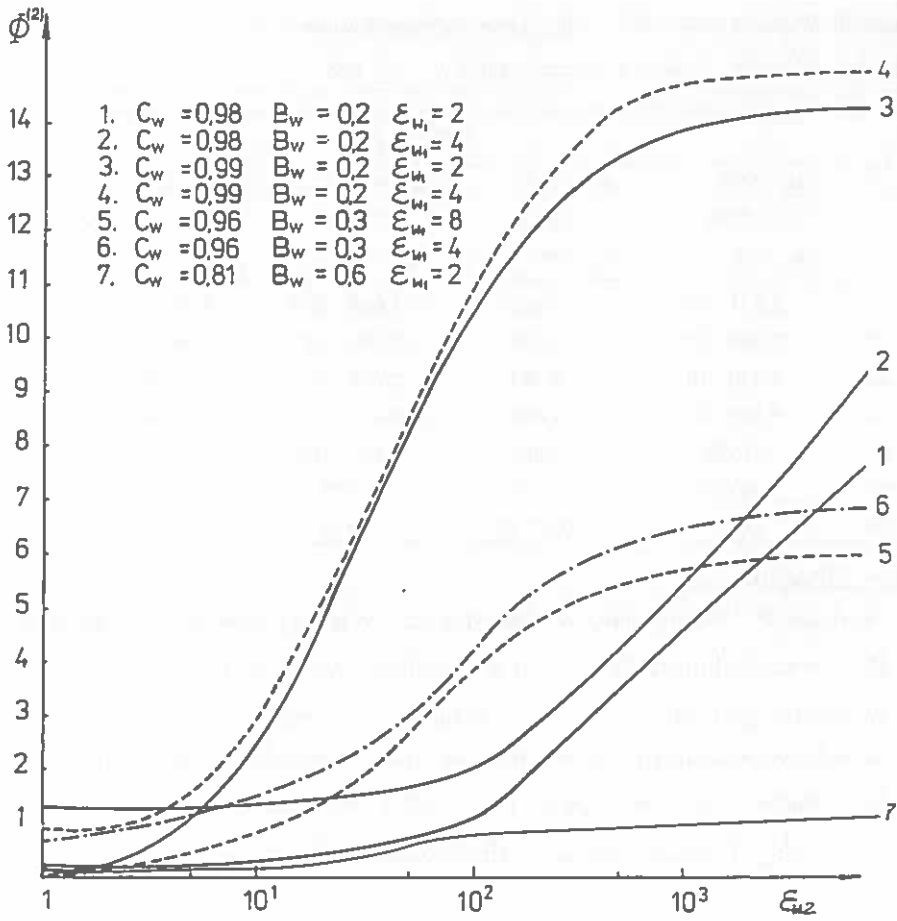
Fig. 37. Dependence:  $\phi^{(2)} = f(\epsilon_{w_1})$  for selected  $B_w$ ,  $C_w$  and  $\epsilon_{w_2}$ .

Tabela 20. Wartości funkcji  $\Phi^{(2)} = f(\varepsilon_{w_2})$  przy wybranych wartościach  $B_w$ ,  $C_w$  i  $\varepsilon_{w_1}$ Table 20.  $\Phi^{(2)} = f(\varepsilon_{w_2})$  values at selected values  $B_w$ ,  $C_w$  and  $\varepsilon_{w_1}$ 

$\varepsilon_{w_2}$	$\Phi^{(2)}$			
	$B_w = 0,2$	$B_w = 0,2$	$B_w = 0,6$	$B_w = 0,6$
	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,98$	$C_w = 0,81$	$C_w = 0,99$
	$\varepsilon_{w_1} = 2$	$\varepsilon_{w_1} = 4$	$\varepsilon_{w_1} = 2$	$\varepsilon_{w_1} = 2$
1	$2,651 \cdot 10^{-1}$	1,315	$1,089 \cdot 10^{-1}$	$8,757 \cdot 10^{-3}$
5	$2,864 \cdot 10^{-1}$	1,334	$1,469 \cdot 10^{-1}$	$6,007 \cdot 10^{-1}$
10	$3,256 \cdot 10^{-1}$	1,365	$2,271 \cdot 10^{-1}$	1,105
50	$6,540 \cdot 10^{-1}$	1,637	$6,133 \cdot 10^{-1}$	1,903
$10^2$	1,036	1,962	$7,983 \cdot 10^{-1}$	2,047
$10^3$	4,659	5,521	1,097	2,190
$10^4$	8,303	$1,024 \cdot 10^1$	1,140	2,205

Z Rys. 38 wynika, że:

1. Funkcja  $\Phi^{(2)}$  rośnie wraz ze wzrostem  $\varepsilon_{w_2}$  warstwy wewnętrznej ziarniaka.
2. Przy przenikalnościach  $\varepsilon_{w_2} > 10$  decydujący wpływ na wartość  $\Phi^{(2)}$  wywiera względna grubość warstw  $C_w$ . Wraz ze wzrostem  $C_w$ , wzrasta  $\Phi^{(2)}$  (na skutek zwiększonego udziału objętości masy ziarniaka o przenikalności  $\varepsilon_{w_2}$ ).
3. Dla dużych przenikalności ( $\varepsilon_{w_2} > 500$ ) występuje „nasylenie” funkcji  $\Phi^{(2)} = f(\varepsilon_{w_2})$ , szczególnie przy ziarniakach o sferyczności  $B_w > 0,2$ .



Rys. 38. Zależność  $\phi^{(2)} = f(\epsilon_{w2})$ .

Fig. 38. Dependence:  $\phi^{(2)} = f(\epsilon_{w2})$ .

## 8. UPROSZCZONE METODY OBLICZANIA ENERGII I MOMENTU ORIENTACJI DLA ZIARNIAKA W JEDNORODNYM POLU ELEKTROSTATYCZNYM

Ekwiwalentne zastąpienie ziarniaka o budowie warstwowej - ziarniakiem jednorodnym, radykalnie upraszcza analizę jego zachowania się w polu elektrycznym. Nie przypadkowo zatem, jako pierwsze pojawiły się prace teoretyczne dotyczące ziarniaka o analitycznym kształcie elipsoidy i o budowie jednorodnej [2, 11, 42, 85].

Autorem idei aproksymowania ośrodków wielowarstwowych ośrodkami jednorodnymi jest prawdopodobnie F. Ollendorff. Dotyczyła ona jedynie pól statycznych w pakietach zblachowanych obwodów magnetycznych, występujących powszechnie w takich urządzeniach elektrycznych jak silniki lub transformatory. Przez analogię, ta metoda może być zastosowana również dla ziarniaka w przypadku uproszczonych analiz dotyczących jego zachowania się w polu elektrostatycznym.

Przy analizie procesów czyszczenia, sortowania i stymulacji w polu elektrycznym biologicznie żywych nasion większości kultur roślinnych, w celu uproszczenia zagadnienia, rozpatruje się je jako izotropową, wydłużoną sferoidę [2]. Takie uproszczenie, aczkolwiek radykalnie ułatwia analizę teoretyczną, to jednak często nie pozwala zbadać istoty elektrofizycznych zjawisk, zachodzących w warstwowej strukturze ziarna, takich jak np. siły elektrostrykcyjne. Dokładność obliczonego momentu orientacji, działającego na sferoidalne cząstki (ziarna) o złożonej strukturze warstwowej, ma istotne znaczenie przy projektowaniu elektrostatycznych maszyn sortująco – czyszczących. W szczególności dwie podstawowe warstwy ziarniaka zbóż w tym i traw: 1 – okrywa owocowo-nasienna + warstwa aleuronowa i 2 – komórki bielma wypełnione skrobią + zarodek (Rys. 1) różnią się między sobą budową biologiczną, składem chemicznym, a zatem i właściwościami elektrycznymi [98].

Uwzględnienie różnic we właściwościach elektrycznych poszczególnych warstw ma duży wpływ na dokładność wyznaczonego momentu orientacji i energii. Szansę na podniesienie dokładności uproszczonych analiz daje wprowadzenie do obliczeń zastępczej przenikalności dielektrycznej sferoidy, wyznaczonej np. jednym z poniższych sposobów.

## 8.1. Dielektryczna przenikalność zastępcza

### 8.1.1. Kryterium równości zmian energii

Zastępczą przenikalność dielektryczną sferoidy o strukturze warstwowej można wyznaczyć z warunku równości zmian energii w obszarze  $G = G_1 + G_2$ , wg tzw. kryterium energetycznego

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_G (\varepsilon_{z1} - 1) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 \, dG = \\ & = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{G_1} (\varepsilon_1 - 1) \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0 \, dG_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{G_2} (\varepsilon_2 - 1) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_0 \, dG_2 \end{aligned} \quad (174)$$

gdzie:

$G$  - objętość całej sferoidy,

$G_1$  - objętość warstwy zewnętrznej,

$G_2$  - objętość warstwy wewnętrznej,

$\mathbf{E}$  - natężenie pola wewnątrz sferoidy izotropowej o zastępczej przenikalności dielektrycznej  $\varepsilon_z$ ,

$\mathbf{E}_0$  - natężenie pola elektrostatycznego zewnętrznego,

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  - natężenie pola, odpowiednio w obszarze  $G_1$  i  $G_2$ .

Po scałkowaniu wyrażenia (174) we współrzędnych sferoidy wydłużonej otrzymano równanie kwadratowe względem  $\varepsilon_{z1}$

$$u_1 \varepsilon_{z1}^2 + v_1 \varepsilon_{z1} + w_1 = 0 \quad (175)$$

skąd

$$\varepsilon_{z1} = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 4u_1 w_1}}{2u_1}. \quad (176)$$

Rozwiązanie jest oczywiście prawdziwe tylko dla  $\varepsilon_{z1} > 0$ . Odpowiednie współczynniki wchodzące do równania (175) mają postać:

$$u_1 = \sin^2 \gamma GD + \cos^2 \gamma FB + K_{e2} BD,$$

$$u_1 = \sin^2 \gamma (GC - GD) - \cos^2 \gamma (FA + FB) - K_{e2} (AB - BC),$$

$$w_1 = -\sin^2 \gamma GC + \cos^2 \gamma FA - K_{\epsilon_2} AC,$$

$$A = Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0)\operatorname{ch}\eta_0, \quad B = Q_1(\operatorname{ch}\eta_0)\operatorname{sh}\eta_0,$$

$$C = -[Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0)]', \quad D = [Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0)] \frac{1}{B_w},$$

$$G = Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0)\operatorname{ch}\eta_0 - Q_1(\operatorname{ch}\eta_0)\operatorname{sh}\eta_0, \quad F = [Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0)]' - \operatorname{cth}\eta_0 Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0),$$

$$\operatorname{sh}\eta_0 = \frac{B_w}{\sqrt{1-B_w^2}}, \quad \operatorname{ch}\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{1-B_w^2}},$$

$B_w = \frac{b}{c}$  - współczynnik sferyczności sferoidy,

$2b$  - grubość sferoidy,

$2c$  - długość sferoidy,

$K_{\epsilon_2}$  - funkcja uwzględniająca ilościowe zmniejszenie energii w obszarze zajęтым przez sferoidę warstwową o jednostkowej objętości, w zależności od kąta  $\gamma$ , sferyczności  $B_w$ , dielektrycznej przenikalności względnej  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_2$  poszczególnych warstw i ich względnej grubości  $C_w$ ,  $C_w = c_1/c_0$ ,

$2c_1$  - długość sferoidy warstwy wewnętrznej,

$2c_0$  - długość sferoidy warstwy zewnętrznej,

$Q_1(\operatorname{ch}\eta_0)$  - funkcja Legendre'a drugiego rodzaju,

$$Q_1(\operatorname{ch}\eta_0) = \frac{1}{2} \operatorname{ch}\eta_0 \ln \left( \frac{\operatorname{ch}\eta_0 + 1}{\operatorname{ch}\eta_0 - 1} \right) - 1,$$

$Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0)$  - funkcja Legendre'a stowarzyszona drugiego rodzaju,

$$Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0) = \frac{1}{2} \operatorname{sh}\eta_0 \ln \left( \frac{\operatorname{ch}\eta_0 + 1}{\operatorname{ch}\eta_0 - 1} \right) - \operatorname{cth}\eta_0,$$

$$[Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0)]' = \frac{1}{2} \operatorname{ch}\eta_0 \ln \left( \frac{\operatorname{ch}\eta_0 + 1}{\operatorname{ch}\eta_0 - 1} \right) + \operatorname{cth}^2 \eta_0 - 2,$$

$$Q_1'(\operatorname{ch}\eta_0) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sh}\eta_0 \ln \left( \frac{\operatorname{ch}\eta_0 + 1}{\operatorname{ch}\eta_0 - 1} \right) - 2\operatorname{cth}\eta_0 \right],$$

$\eta_0, \eta_1$  - współrzędne w układzie współrzędnych sferoidy wydłużonej [41],  
 $\gamma$  - kąt zawarty między krótszą osią sferoidy a wektorem natężenia zewnętrznego pola elektrostatycznego  $E_0$ .

Przebieg funkcji  $\varepsilon_{z1} = f(C_w)$  wyznaczony z równania (175) stabilizowano na maszynie cyfrowej i przedstawiono na Rys. 39 – krzywa 1.

### 8.1.2. Kryterium równości momentów

Kryterium równości momentów oparte jest na warunku

$$M_{e1} = M_{e2} \quad (177)$$

gdzie:

$M_{e1}$  - moment działający na sferoidę jednorodną w polu elektrostatycznym jednorodnym  $E_0$ ,

$M_{e2}$  - moment działający na sferoidę o strukturze warstwowej w polu elektrostatycznym jednorodnym  $E_0$ .

Wstawiając w miejsce  $M_{e1}$  i  $M_{e2}$  odpowiednie wyrażenia wyznaczone w p. 6.5 i 7.5 oraz przekształcając je otrzymano podobnie jak przy kryterium energetycznym równanie kwadratowe względem  $\varepsilon_{z2}$

$$u_2 \varepsilon_{z2}^2 + v_2 \varepsilon_{z2} + w_2 = 0. \quad (178)$$

Obliczone stąd  $\varepsilon_{z2}$  opisane jest wyrażeniem

$$\varepsilon_{z2} = \frac{-v_2 \pm \sqrt{v_2^2 - 4u_2 w_2}}{2u_2} \quad (179)$$

gdzie:

$$u_2 = GD + FB + \Phi_2 BD,$$

$$v_2 = GC - FA - GD - FB - \Phi_2 (AD - BC),$$

$$w_2 = -GC + FA - \Phi_2 AC,$$

$\phi_2$  - funkcja charakteryzująca wpływ sferyczności sferoidy  $B_w$ , względnej grubości jej warstw  $C_w$  i przenikalności dielektrycznej poszczególnych warstw  $\epsilon_1, \epsilon_2$  na wielkość działającego nań momentu orientacji  $M_{\epsilon_2}$  wywołanego działaniem pola elektrostatycznego jednorodnego  $E_0$ ,

$A, B, C, D, E, F, G$  – stałe określone jak w punkcie 8.1.1.

Przyjmujemy tylko rozwiązanie spełniające warunek  $\epsilon_{z2} > 0$ .

Przebieg  $\epsilon_{z2} = f(C_w)$  wyznaczony na podstawie (179) stabilaryzowano i przedstawiono na Rys. 39 – krzywa 2. Obliczone wartości  $\epsilon_{z2}$  w całym przedziale zmienności  $C_w \in (0,87 \div 1,00)$  przyjętym do badań, są większe od  $\epsilon_{z1}$  obliczonych ze wzoru (176). Maksymalne różnice nie przekraczają 5,5%.

### 8.1.3. Kryterium proporcjonalności

O wiele łatwiej można wyznaczyć  $\epsilon_z$  jako średnią ważoną przenikalności dielektrycznej poszczególnych warstw, gdzie funkcjami wagowymi są objętości warstw. Przenikalność zastępcza jest proporcjonalna do objętościowych udziałów warstw sferoidy o określonych przenikalnościach. W przypadku struktury dwuwarstwowej otrzymujemy

$$\epsilon_{z3} = \frac{\epsilon_1 G_1 + \epsilon_2 G_2}{G_1 + G_2}, \quad (180)$$

gdzie:

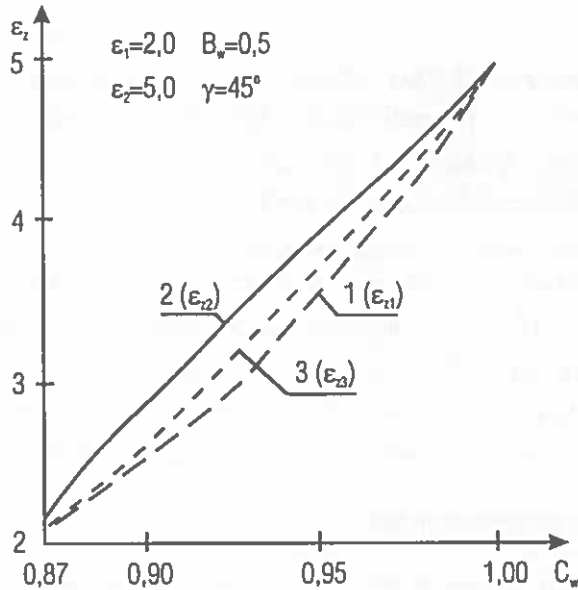
$$G_1 = \frac{4}{3} \pi a^3 (\text{sh}^2 \eta_0 \text{ch} \eta_0 - \text{sh}^2 \eta_1 \text{ch} \eta_1),$$

$$G_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{sh} \eta_1 \text{ch} \eta_1,$$

$$\text{ch} \eta_1 = C_w \text{ch} \eta_0, \quad \text{sh} \eta_1 = \sqrt{\text{ch}^2 \eta_1 - 1}.$$

Wzór (180) jest o wiele prostszy od wyrażień (176) oraz (179). Przebiegi funkcji  $\epsilon_z = f(C_w)$  obliczone wg zależności (176), (179) i (180) porównano na Rys. 39.





Rys. 39. Zastępcza przenikalność dielektryczna sferoidy dwuwarstwowej; 1 – wyznaczona z warunku równości energii (kryterium energetyczne), 2 – wyznaczona z warunku równości momentu orientacji (kryterium momentu), 3 – wyznaczona jako średnia ważona przenikalności dielektrycznej poszczególnych warstw, gdzie funkcjami wagowymi są objętości warstw.

Fig. 39. The substitute dielectric permittivity of a two-layer spheroid; 1 - determined from the energy criterion, 2 - determined from the torque criterion, 3 - determined as the weighted mean of dielectric permittivity of particular layers, where layer volumes are tapering functions.

Wartości dielektrycznej przenikalności zastępczej obliczane wg (176), na podstawie warunku równości zmian energii w obszarze zajmowanym przez sferoidę izotropową o przenikalności  $\epsilon_1$  i identyczną geometrycznie, ale o strukturze warstwowej i przenikalnościach warstw  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ , są mniejsze w całym przedziale zmienności  $C_w$  od  $\epsilon_{2,3}$  obliczanych w sposób uproszczony (180). Maksymalne różnice nie przekraczają 5%.

## 8.2. Zależność energii i momentu orientacji od sposobu obliczania dielektrycznej przenikalności zastępczej

Energię  $W$  zgromadzoną w sferoidzie umieszczonej w jednorodnym polu elektrostatycznym, obliczono wstawiając kolejno  $\epsilon_2$  określone wzorami (176), (179) i (180) do wyrażenia (181):

$$W = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 G E_0^2 K_e \quad (181)$$

gdzie:

$$G = \frac{4}{3}\pi a^3 \operatorname{sh}^2 \eta_0 \operatorname{ch} \eta_0 - \text{objętość sferoidy,}$$

$$K_e = \left( \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} - 1 \right) (\sin^2 \gamma H_1 - \cos^2 \gamma H_2),$$

$$H_1 = \frac{1}{L} \left\{ [\mathcal{Q}_1(\operatorname{ch} \eta_0)]' \operatorname{ch} \eta_0 - \mathcal{Q}_1(\operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{sh} \eta_0 \right\}; \quad H_2 = \frac{1}{W_L} \left\{ [\mathcal{Q}'_1(\operatorname{ch} \eta_0)]' - \operatorname{cth} \eta_0 \mathcal{Q}'_1(\operatorname{ch} \eta_0) \right\};$$

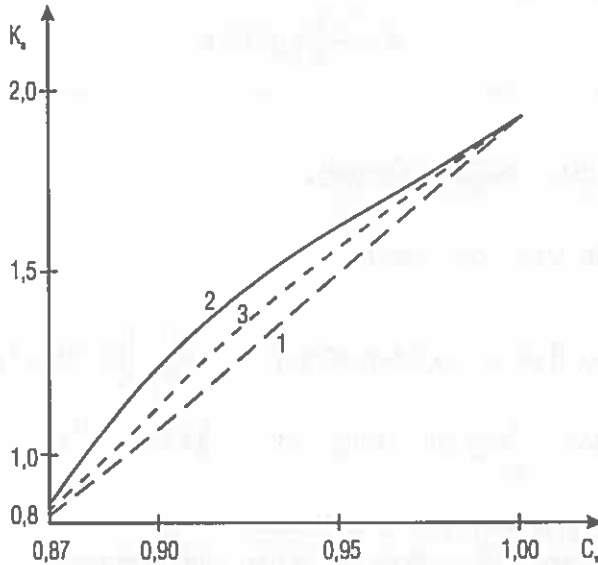
$$L = \mathcal{Q}'_1(\operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{ch} \eta_0 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} \mathcal{Q}_1(\operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{sh} \eta_0; \quad W_L = -[\mathcal{Q}'_1(\operatorname{ch} \eta_0)]' + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} \mathcal{Q}'_1(\operatorname{ch} \eta_0).$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresie (Rys. 40).

Jak wynika z Rys. 40, wartość  $K_e$ , a tym samym energia  $W$ , określona przez  $\varepsilon_{z,3}$  wyznaczone w sposób uproszczony (180) – krzywa 3, są nieco większe od wartości obliczanych dokładnie – krzywa 1. Maksymalne względne różnice między tymi przebiegami nie przekraczają 6%.

Wartość energii określona poprzez  $\varepsilon_{z,1}$  z wyrażenia (176) pokrywa się z wartością obliczoną dokładnie. Wynika to z przyjętego kryterium równości energii.

Wartości energii obliczane na podstawie  $\varepsilon_{z,2}$  - krzywa 2, są większe od wartości wyznaczanych dokładnie. Maksymalne różnice względne wynoszą w tym przypadku około 16%.



Rys. 40. Zależność obliczanej wartości energii  $K_e = f(C_w)$  od sposobu określania zastępczej przenikalności dielektrycznej; 1 – z kryterium energetycznego, 2 – z kryterium momentu, 3 – jako średnia ważona.

Fig. 40. The dependence of computed energy values  $K_e = f(C_w)$  on the applied method to compute the substitute dielectric permittivity; 1 - Energy Criterion, 2 - Torque Criterion, 3 - weighted average.

Moment orientacji  $M_e$  wyznaczono wstawiając  $\epsilon_z$  określone kolejno przez (176), (179) i (180) do wyrażenia (182):

$$M_e = -\frac{1}{2} \epsilon_0 G E_0^2 \Phi \sin 2\gamma, \quad (182)$$

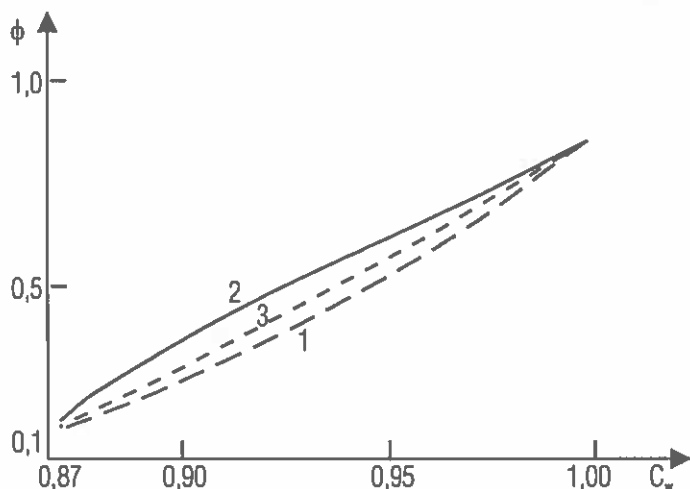
gdzie

$$\Phi = \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon_0} - 1 \right) (H_1 - H_2).$$

Przebieg momentu jest określony poprzez funkcję  $\Phi$  (Rys. 41). Jego wartość obliczona na podstawie  $\epsilon_{z1}$  (176) wyznaczonego z kryterium energetycznego – krzywa 1, różni się bardziej od przebiegu wyznaczonego dokładnie – krzywa 2, niż krzywa 3 obrazująca przebieg momentu określonego przez  $\epsilon_{z3}$  obliczany w

sposób uproszczony ze wzoru (180). Największy błąd względny w tym przypadku wynosi około – 30%, gdy tymczasem przy obliczeniach uproszczonych (180) spada do – 15%.

Prowadzenie obliczeń uproszczonych z użyciem  $\varepsilon_{z3}$  określonego wzorem (180) jest więc usprawiedliwione. Poprawia w tym przypadku dokładność obliczeń o 15% w stosunku do  $\varepsilon_{z1}$  wyznaczonego z kryterium równości energii.



Rys. 41. Zależność obliczanej wartości funkcji  $\phi = f(C_w)$  od sposobu określania zastępczej przenikalności dielektrycznej; 1 – z kryterium energetycznego, 2 – z kryterium momentu, 3 – jako średnia ważona.

Fig. 41. The dependence of  $\phi = f(C_w)$  values on the way of determination of the substitute dielectric permittivity : 1 - energy criterion, 2 - torque criterion, 3 - weighted average.

Należy podkreślić, że  $\varepsilon_{z3} = f(C_w)$  można obliczyć posługując się zwykłym, czterodziałaniowym kalkulatorem. Przy wyznaczaniu  $\varepsilon_{z1}$  i  $\varepsilon_{z2}$ , należy posługiwać się już komputerem ze względu na złożoność wzorów.

Przeprowadzona analiza wykazała, że przenikalność dielektryczna wyznaczona z kryterium proporcjonalności, pozwala na stosunkowo dokładne wyznaczanie energii i momentu orientacji w porównaniu z kryterium energetycznym i kryterium momentu. Wprawdzie kryterium energetyczne pozwala wyznaczyć dokładnie energię, a kryterium momentu – moment, co wynika z przyjętych założeń, ale żadne z tych kryteriów nie pozwala jednocześnie zagwarantować dużej dokładności dla obliczania energii i momentu. W związku z

tym, kryterium proporcjonalności będąc matematycznie najprostszym, okazuje się jednocześnie najbardziej przydatnym do praktycznych zastosowań.

## 9. WYNIKI BADAŃ LABORATORYJNYCH

Analiza teoretyczna, przeprowadzona w rozdziale 6 i 7 oraz liczne prace laboratoryjne i teoretyczne innych autorów [2, 7, 50] dowodzą, że moment obrotowy działający na ziarniak umieszczony w polu elektrycznym zależy m. in. od jego przenikalności dielektrycznej.

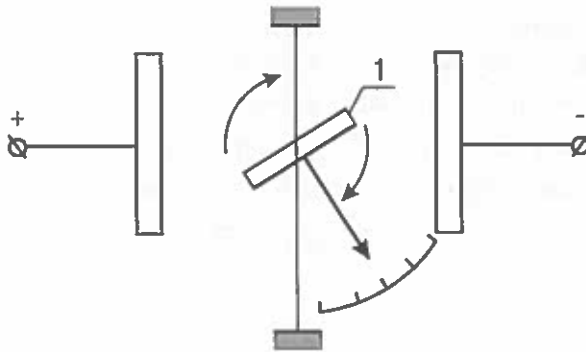
Przydatność przeprowadzonych analiz do określania przenikalności dielektrycznej pojedynczego ziarniaka sprawdzono za pomocą metody podanej w pracy [2, 71] a zmodyfikowanej przez autora.

### 9.1. Zasada pomiaru przenikalności dielektrycznej

Pomiar przenikalności dielektrycznej jest analogiczny do pomiaru napięcia woltomierzem elektrostatycznym. Zasadę pomiaru przedstawia Rys. 42.

W charakterze wzorca (etalonu) – 1, został użyty cienki pręt o znanych wymiarach i znanej przenikalności. Współrzędne sferoidy wydłużonej pozwalają na zmianę kształtu sferoidy wydłużonej od niemal kulistego, aż do bardzo wydłużonego, podobnego do cienkiego pręta o skończonej długości [41, 42].

Zaletą takiego etalonu jest możliwość łatwego i dokładnego wykonania, w przeciwieństwie do wzorca elipsoidalnego proponowanego przez W. N. Szmigiela [2, 71].



Rys. 42. Schemat budowy przyrządu do pomiaru przenikalności dielektrycznej.

Fig. 42. Measuring equipment for dielectric constant, idea.

Jeśli tak wykonany wzorec zostanie zawieszony na cienkiej, sprężystej nitce, przechodzącej przez jego środek i umieszczony w polu elektrycznym, to zacznie działać na niego moment obrotowy  $M_e$  (63):

$$M_e = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_e^2 \cdot G_e \cdot \Phi_e \cdot \sin 2\gamma, \quad (183)$$

gdzie:

$G_e$  - objętość wzorca,

$\Phi_e$  - współczynnik charakteryzujący wpływ kształtu i względnej przenikalności etalonu na wielkość momentu obrotowego wywołanego działaniem pola,

$\gamma$  - kąt obrotu zawarty między dłuższą osią wzorca a płaszczyzną elektrody (Rys. 17).

Pod wpływem momentu obrotowego  $M_e$  wzorec zacznie się obracać pokonując przeciwnie skierowany moment  $M_z$ , pochodzący od skręcanej nitki:

$$M_z = W_s \cdot \gamma, \quad (184)$$

gdzie:

$W_s$  - współczynnik proporcjonalności zależny od sprężystości materiału i jego długości.

Dla każdorazowa zadanej wartości  $E_0$ , można otrzymać przy odpowiednim kącie skręcenia  $\gamma$ , położenie równowagi statycznej:

$$M_e = M_z. \quad (185)$$

Jeżeli na tej samej nici zostanie zawieszony w miejsce wzorca, analogicznie wykonany pręcik o znanych wymiarach ale nieznaney (mierzonej) przenikalności elektrycznej, to również zmieniając odpowiednio natężenie pola  $E_b$ , można wytworzyć moment obrotowy  $M_b$  obracający go o ten sam kąt co i pręt wzorcowy. Ta sytuacja będzie miała miejsce w przypadku równości momentów:

$$M_e = M_b = M_z, \quad (186)$$

gdzie:

$$M_b = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_b^2 \cdot G_b \cdot \Phi_b \cdot \sin 2\gamma, \quad (187)$$

$E_b$  - natężenie pola elektrycznego, przy którym następuje obrócenie badanego pręcika o kąt  $\gamma$ .

Wstawiając do wzorów (183) i (187) w miejsce  $G_e$  i  $G_b$  wyrażenia oparte na wzorze (46), opisujące odpowiednio objętości wzorca i pręcika badanego:

$$G_e = \frac{4}{3} \pi a_e^3 \frac{B_{we}^2}{(1 - B_{we}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (188)$$

$$G_b = \frac{4}{3} \pi a_b^3 \frac{B_{wb}^2}{(1 - B_{wb}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (189)$$

a następnie porównując momenty  $M_e$  i  $M_b$  zgodnie z (186) i dokonując przekształceń, otrzymano:

$$E_b^2 a_b^3 \frac{B_{wb}^2}{(1 - B_{wb}^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi_b = E_e^2 a_e^3 \frac{B_{we}^2}{(1 - B_{we}^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi_e, \quad (190)$$

skąd

$$\Phi_b = \frac{E_e^2 a_e^3}{E_b^2 a_b^3} \left( \frac{B_{we}}{B_{wb}} \right)^2 \left( \frac{1 - B_{wb}}{1 - B_{we}} \right)^{\frac{3}{2}} \Phi_e. \quad (191)$$

gdzie:

$E_e, E_b$  - natężenia pola elektrycznego, przy których następuje obrócenie etalonu i pręcika badanego o ten sam kąt  $\gamma$ .

Mierzona przenikalność elektryczną  $\epsilon_b$  badanego pręcika określa się na podstawie stabelaryzowanej bądź wykreślonej funkcji (64),  $\Phi = f(\epsilon_w)$ :

$$\Phi = (\epsilon_w - 1)(H_1 + H_2). \quad (192)$$

Dla konkretnej, obliczonej ze wzoru (191) wartości  $\Phi_b$ , można odczytać szukaną wartość przenikalności  $\epsilon_b$  posługując się Tabelą 21.

Uwzględniając, że odległość między elektrodami odchylającymi jest niezmienna, zachodzi równość:

$$\frac{E_e}{E_b} = \frac{U_e}{U_B}, \quad (193)$$

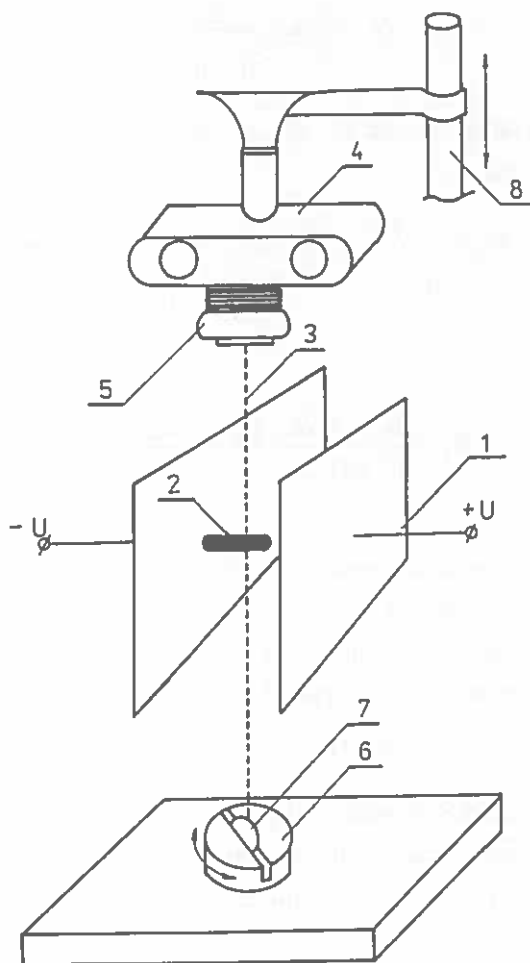
i wzór (191) przyjmuje kształt:

$$\Phi_b = \left( \frac{U_e}{U_b} \right)^2 \left( \frac{a_e}{a_b} \right)^3 \left( \frac{B_{we}}{B_{wb}} \right)^2 \left( \frac{1 - B_{wb}}{1 - B_{we}} \right)^{\frac{3}{2}} \Phi_e. \quad (194)$$



## 9.2. Stanowisko pomiarowe

Badania przeprowadzono na stanowisku pomiarowym, którego widok przedstawia Rys. 43.



Rys. 43. Widok stanowiska pomiarowego do określania względnej przenikalności dielektrycznej: 1 - płaski układ elektrod; 2 - etalon (wzorzec) lub pręcik pomiarowy; 3 - nić; 4 - aparat fotograficzny; 5 - obiektyw; 6 - ograniczniki; 7 - obciążnik; 8 - statyw.

Fig. 43. Measuring stand layout – dielectric constant measurements: 1 – flat plate electrodes; 2 – etalon or measuring rod; 3 – string; 4 – camera; 5 – lens; 6 – stop; 7 – load; 8 – stand holder.

Etalon (lub badany pręcik) 2, z wywierconym przelotowo w osi ciężkości otworem, zawieszono na nici 3. Nić zamocowano jednym końcem w okularze obiektywu 5. drugi koniec nici obciążono blaszką 7, luźno wchodzącą w podłużne wycięcie ogranicznika 6, uniemożliwiającego swobodne obracanie się nici.

Takie zamocowanie uniemożliwia przyciągnięcie pręcika do jednej z elektrod, szczególnie przy dużych wartościach natężeń pola elektrycznego. Zamocowanie jednostronne nici (tylko w okularze) proponowane w pracach [2] i [71] uniemożliwia wykonanie pomiarów. Siły przyciągające spowodowane indukowaniem się ładunku, są tak duże, że wychylenie nici od pionu następuje szybciej niż obrót pręcika, co zniekształca założone warunki pomiaru.

Aparat fotograficzny można obracać wokół osi obiektywu i przesuwając wzdłuż osi statywu 8.

Elektrody zasilono napięciem stałym, płynnie regulowanym z prostownika miernika izolacji.

Jako wzorzec zastosowano aluminiowy pręcik ( $\epsilon = \infty$ ), o wymiarach: średnica  $- 2 b = 1,96$  mm, długość  $2 c = 8,13$  mm. W charakterze materiału badanego przyjęto pręcik wykonany ze szkła organicznego (plexiglas, metaplex) o wymiarach zbliżonych do wzorca:  $2 b = 2,14$  mm, długość  $2 c = 8,09$  mm.

Jako nić została zastosowana cienka, sprężysta nić gumowa. Włos proponowany w [71] okazał się za sztywny dla sił skracających pręcik.

Moment działający na ziarniak umieszczony w polu elektrycznym zależy od kąta  $\gamma$  (wzór 63 i Rys. 17). Przy  $\gamma = 0$ , moment jest zerowy. Z tego powodu pomiary należy zaczynać od wstępnego ustawienia pręcika pod kątem  $\gamma \neq 0$ , dokonywanego obrotem ogranicznika 6.

W czasie wykonywania pomiarów, dla każdego położenia pręcika zależnego od przyłożonego napięcia, wykonywane jest zdjęcie aparatem fotograficznym 4. Kąt  $\gamma$  odczytywany jest ze zdjęcia.

Do obliczeń  $\Phi_b$  (191) należy brać wartość napięcia (natężenia  $E_b$ ) wywołującego obrót pręcika o  $\gamma \approx 45^\circ$ . w tym położeniu dokładność pomiaru jest największa [2], ponieważ przy tym kącie moment jest maksymalny (187).

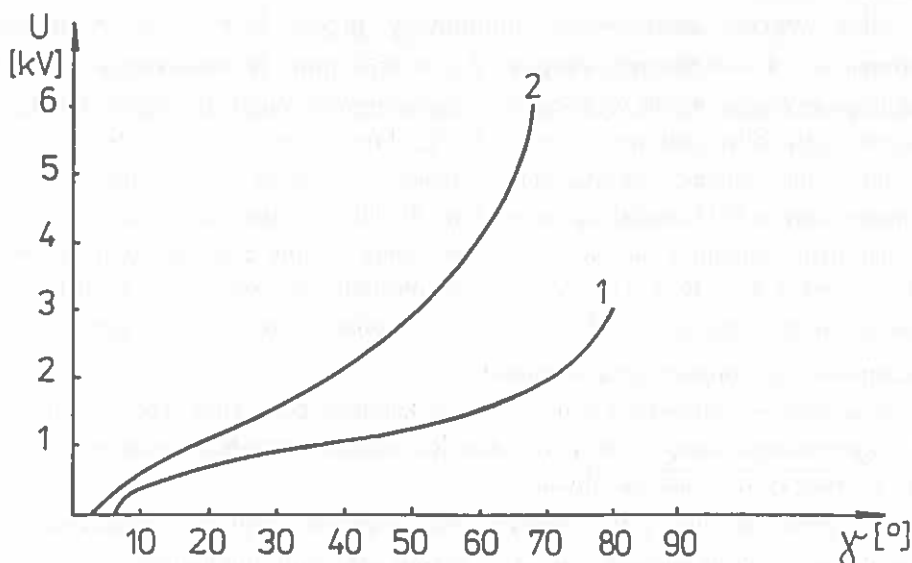
### 9.3. Przykład pomiarowy

Przykładowo podjęto próbę określenia przenikalności dielektrycznej próbki wykonanej z polimetakrylanu metylu (plexiglas, szkło organiczne, metaplex). Przenikalność dielektryczna tego materiału zmierzona mostkiem przy

temperaturze 20°C i częstotliwości 50 Hz wynosiła  $\epsilon_r = 5,2$ . Próbkę wykonano w kształcie walców o długości zbliżonej do naturalnego ziarniaka zbóż i minimalnej średnicy, umożliwiającej nawiercenie otworu o średnicy 0,3 mm dla przewleczenia nitki i zapewniającej odpowiednią wytrzymałość mechaniczną, uniemożliwiającą złamanie próbki w czasie nawlekania nici. Wymiary geometryczne próbek wyniosły odpowiednio:

	aluminium	plexiglas
średnica $2b$	1,96	2,14
długość $2c$	8,13	8,09
odległość ognisk $2a$	7,90	7,80
sferyczność $B_w$	0,241	0,264

Wyniki pomiarów kąta  $\gamma$  w funkcji napięcia przytoczono na Rys. 44, ( $\gamma$  - kąt wychylenia badanych pręcików w funkcji napięcia).



Rys. 44. Zależność  $U = f(\gamma)$  dla pręcików wykonanych z różnych materiałów: 1 - aluminium:  $2b = 1,96$  mm;  $2c = 8,13$  mm; 2 - plexiglas:  $2b = 2,14$  mm;  $2c = 8,09$  mm.

Fig. 44.  $U = f(\gamma)$ : 1 - for aluminium rod:  $2b = 1,96$  mm;  $2c = 8,13$  mm; 2 - plexiglass:  $2b = 2,14$  mm;  $2c = 8,09$  mm.

Próbka metalowa obróciła się o kąt  $\gamma = 45^\circ$  przy napięciu  $U_c = 1,0$  kV a próbka plexiglasowa przy napięciu  $U_b = 2,5$  kV.

Podstawiając te wartości napięć oraz dane dotyczące geometrii próbek i wartość  $\Phi_r = 11,843$  (odczytana z Tabeli 21 dla  $\varepsilon_r = 10^6$ ;  $B_w = 0,240$ ) do wzoru (194) uzyskano:

$$\Phi_b = \left(\frac{1,0}{2,5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3,95}{3,90}\right)^3 \cdot \left(\frac{0,241}{0,265}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-0,265}{1-0,241}\right)^2 \cdot 11,843 = 1,566$$

Dla wartości  $\Phi_b = 1,566$  i sferyczności próbki plexiglasowej wynoszącej  $B_w = 0,264$ , odczytano z Tabeli 21 wartość jej przenikalności dielektrycznej  $\varepsilon_b = 4,99$  (metodą interpolacji liniowej między dwoma sąsiednimi punktami).

Uzyskana wartość zmierzonej przenikalności w tym przypadku jest mniejsza od wartości rzeczywistej o:

$$\Delta\varepsilon_{\%} = \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot 100 = \frac{4,99 - 5,2}{5,2} \cdot 100 = -4,03\%$$

Wartość tego błędu w porównaniu z wynikami uzyskanymi przez Szmigiela [2] jest niewielka. W skrajnym przypadku, dla owsa przy wilgotności  $w = 32\%$  uzyskał on przenikalność  $\varepsilon_w = \infty$ . Najmniejsze przenikalności uzyskiwał dla pszenicy – w granicach:  $10 + 60$  przy jej wilgotności  $w = 8 + 32\%$ . W każdym z tych przypadków zwraca na siebie uwagę brak powtarzalności wyników.

Dodatkowo, dla ilustracji, określono względną przenikalność dielektryczną dla czterech podstawowych zbóż pochodzących ze zbiorów 1984 r. Wyniki pomiarów zamieszczono w Tabeli 22.

Zmierzona w pracy [45] przenikalność dla ziarna pszenicy ozimej czerwonej (dla warstwy ziarna), wynosi  $\varepsilon_w = 3 + 10$  przy częstotści  $f = 250$  Hz,  $w = 2,7 + 9,9\%$ ,  $T = 297$  K.

Wartość przenikalności  $\varepsilon_w = 4,5$  uzyskana dla pszenicy ozimej „Jana”, jak wynika z Tabeli 22 jest porównywalna z tymi wynikami.

Jak przyznaje sam autor pracy [2], tak duże niedokładności zostały spowodowane przyjęciem do obliczeń kształtu ziarniaka w formie idealnej elipsoidy. Nie wspomina nic o wpływie niedokładności wykonania metalowego etalonu. Jak wynika ze wzoru (194), kształt etalonu ma również duży wpływ na dokładność pomiaru, decydując o wartości  $\Phi_r$ .

Wprowadzenie cylindrycznego kształtu próbki i wzorca usuwa jeden z zasadniczych czynników (jakim jest niedokładność wykonania elipsoidalnego

wzorca), decydujących o tak dużej wartości błędu uzyskiwanego w metodzie pomiarowej Szmigiela [2, 71].

Proponowane rozwiązanie wymaga przeprowadzenia badań mających na celu wybór optymalnej wielkości próbki i wzorca (długości i średnicy), pozwalającej na uzyskanie jak największej dokładności. Udoskonalenia wymaga również sposób mocowania (na nitce) wzorca i ziarniaka. Stosowane dotychczas rozwiązanie jest bardzo pracochłonne i wymaga zegarmistrzowskich umiejętności.

Stosowanie tej metody wymaga posiadania dokładnych tablic  $\Phi = f(\varepsilon_w)$ , przy wartościach  $B_w$  zmieniających się co 0,01, oraz  $\varepsilon_w$  zmieniających się co 0,01. Takie tablice zostały na podstawie (64) sporządzone. Z uwagi na dużą ich objętość nie zostały włączone do pracy.

Tabela 21. Tablica wartości funkcji  $\Phi$  do określania względnej przenikalności dielektrycznej  $\epsilon_w$

Table 21.  $\Phi$  function values tabulated to determine relative permittivity  $\epsilon_w$

$B_w$	0.24	0.25	0.26	0.27	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.53	0.54	0.55	0.65	0.66	0.67
$\epsilon_w$															
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.0	0.250	0.246	0.242	0.237	0.207	0.203	0.199	0.195	0.191	0.134	0.130	0.127	0.093	0.090	0.087
3.0	0.713	0.699	0.685	0.671	0.577	0.654	0.551	0.539	0.526	0.359	0.349	0.339	0.247	0.238	0.230
4.0	1.217	1.190	1.163	1.137	0.963	0.939	0.917	0.894	0.872	0.581	0.564	0.547	0.394	0.380	0.366
5.0	1.711	1.669	1.628	1.588	1.327	1.293	1.259	1.226	1.194	0.780	0.756	0.733	0.524	0.504	0.486
6.0	2.179	2.121	2.065	2.010	1.660	1.614	1.570	1.526	1.484	0.954	0.924	0.895	0.635	0.611	0.588
7.0	2.615	2.541	2.469	2.399	1.960	1.904	1.849	1.796	1.744	1.105	1.070	1.035	0.730	0.703	0.676
8.0	3.015	2.929	2.842	2.757	2.230	2.164	2.099	2.036	1.976	1.236	1.196	1.157	0.812	0.781	0.751
9.0	3.393	3.287	3.184	3.085	2.474	2.398	2.324	2.252	2.183	1.351	1.307	1.264	0.883	0.849	0.816
10.0	3.740	3.617	3.499	3.386	2.694	2.609	2.526	2.446	2.368	1.453	1.404	1.357	0.945	0.908	0.873
15.0	5.132	4.937	4.750	4.572	3.531	3.407	3.288	3.173	3.064	1.817	1.754	1.692	1.163	1.117	1.072
20.0	6.125	5.868	5.625	5.396	4.085	3.932	3.786	3.647	3.514	2.041	1.968	1.897	1.294	1.242	1.192
25.0	6.864	6.557	6.269	5.998	4.477	4.302	4.136	3.978	3.828	2.192	2.112	2.035	1.381	1.325	1.271
30.0	7.435	7.087	6.761	6.456	4.768	4.576	4.395	4.223	4.059	2.300	2.216	2.134	1.443	1.385	1.328
35.0	7.889	7.507	7.150	6.816	4.992	4.788	4.594	4.410	4.236	2.382	2.294	2.208	1.490	1.429	1.370
40.0	8.259	7.847	7.464	7.107	5.171	4.955	4.751	4.558	4.375	2.446	2.355	2.266	1.526	1.463	1.402
45.0	8.565	8.123	7.723	7.346	5.316	5.092	4.879	4.679	4.489	2.497	2.403	2.313	1.555	1.491	1.429
50.0	8.824	8.365	7.941	7.547	5.437	5.204	4.985	4.778	4.582	2.539	2.443	2.351	1.578	1.513	1.450
60.0	9.235	8.741	8.285	7.864	5.625	5.381	5.157	4.933	4.728	2.604	2.505	2.409	1.614	1.547	1.483
70.0	9.543	9.026	8.546	8.103	5.765	5.512	5.273	5.049	4.836	2.651	2.550	2.452	1.641	1.573	1.506
80.0	9.793	9.250	8.750	8.290	5.874	5.614	5.368	5.137	4.920	2.687	2.584	2.485	1.661	1.592	1.525
90.0	9.992	9.430	8.915	8.440	5.961	5.694	5.444	5.208	4.986	2.716	2.612	2.511	1.677	1.607	1.539
10 <sup>2</sup>	10.155	9.578	9.049	8.564	6.032	5.760	5.506	5.266	5.040	2.739	2.634	2.532	1.689	1.619	1.551
10 <sup>3</sup>	11.654	10.929	10.273	9.675	6.653	6.338	6.044	5.768	5.510	2.938	2.822	2.711	1.798	1.722	1.649
10 <sup>6</sup>	11.843	11.098	10.425	9.813	6.728	6.408	6.108	5.828	5.566	2.961	2.844	2.732	1.811	1.734	1.660

Tabela 22. Wyniki pomiarów względnej przenikalności dielektrycznej pojedynczych ziarniaków zbóż ze zbiorów 1984 r. (uzyskane przy temperaturze 293 K)

Table 22. Measurement results for dielectric constant of single grains, 1984 harvest (obtained at 293 K)

Nazwa parametru	Etalon Al	Żyto „Dańkowskie Złote”	Jęczmień jary „Diva”	Pszennica ozima „Jara”	Pszennica jara „Jara”	Owies „Leanda”
Wilgotność [%]	-	6,7	7,56	7,3	6,9	10,06
Grubość $2b$ [mm]	2,00	2,7	3,01	3,50	3,43	2,45
Długość $2c$ [mm]	7,56	7,28	8,39	6,43	5,15	9,55
Odl. ognisk						
$2a = 2\sqrt{c^2 - b^2}$ [mm]	7,29	6,74	7,83	5,39	3,84	9,23
Sferyczność $B_w = \frac{2b}{2c}$	0,264	0,37	0,35	0,54	0,66	0,25
Współczynnik $\phi_a$	10,180	-	-	-	-	-
Współczynnik $\phi_b$	-	1,567	3,373	0,664	0,563	4,62
Napięcie wywołujące obrót o $\gamma = 45^\circ$ [V]	690	1250	740	1460	1720	77
Dielektryczna przenikalność wzgl. $\epsilon_w$	$10^6$	6,1	14,7	4,5	5,5	13,6

## 10. PODSUMOWANIE

Przedstawiona praca stanowi jeden z pierwszych kroków dotyczących teoretycznego opracowania szeregu złożonych zjawisk elektrycznych występujących w ziarniaku, potencjalnie żywym organizmie, podczas procesów elektrotechnologicznych. Istota procesów zachodzących pod działaniem pól elektrycznych nie jest dotychczas dobrze poznana i może być wyjaśniona tylko w wyniku wszechstronnych badań elektrotechnicznych, biochemicznych, biofizycznych, cytologicznych i agronomicznych. Rezultaty takich kompleksowych badań mogą być dopiero bazą do opracowywania nowych sposobów elektroobróbki ziarna oraz doskonalszych i prostszych maszyn służących do tego celu.

W ziarniakach poddanych działaniu silnych pól elektrycznych zachodzą zmiany objawiające się na zewnątrz m. in. wzrostem plonów. Żeby mogły zajść pożądane zmiany, muszą być określone parametry obróbki ziarna, takie jak czas działania pola i jego natężenie w określonym obszarze.

W dotychczasowych pracach zwraca się uwagę tylko na wartość natężenia pola elektrycznego panującego na zewnątrz ziarna i pełniącego niejako rolę czynnika roboczego np. w maszynie sortującej. Ziarniak traktuje się jako jednorodną elipsoidę. Konsekwencją tego założenia jest uzyskiwanie w rozwiązaniach również jednorodnego pola w jego wnętrzu. Na nieadekwatność takiego ujmowania zagadnienia zwrócił uwagę już A. M. Basow [2].

W przedstawionej pracy uzyskano formuły analityczne umożliwiające obliczenia natężenia pola w dowolnym obszarze warstwowego modelu ziarniaka (p. 7.1 + 7.3).

Zbadano również wpływ warstwowej budowy ziarniaka na kształtowanie się wartości momentu orientacji, istotnego przy sortowaniu nasion i przy pomiarze przenikalności dielektrycznej pojedynczego ziarniaka (p. 7.5).

Ograniczając się do dwóch warstw, otrzymano stosunkowo proste zależności analityczne, umożliwiające analizę wpływu poszczególnych czynników, związanych z właściwościami ziarna, na rozkład pola i moment obrotowy. Opracowana metoda pozwala również analizować ziarno o dowolnej ilości warstw z uwzględnieniem ich grubości, sferyczności i przenikalności dielektrycznej.

Analizę pola przeprowadzono w układzie współrzędnych sferoidy wydłużonej. Pozwoliło to na zastosowanie, przy pomiarach przenikalności



dielektrycznej pojedynczego ziarniaka metodą W. N. Szmigiela, wzorca o kształcie walca (rozdz. 9). Dotychczas stosowany był wzorec elipsoidalny, którego dokładne wykonanie z uwagi na niewielkie wymiary i żądany kształt jest bardzo trudne. Zastosowanie etalonu o kształcie walca umożliwiło obniżenie błędu pomiarowego.

W rozdziale ósmym podano sposób ekwiwalentnego zastępowania ziarniaka o budowie warstwowej, ziarniakiem jednorodnym. Umieszczone w tym rozdziale wykresy pozwalają na określenie błędu i wprowadzenie poprawek w przypadku postępowania się metodą obliczeniową opracowaną dla modelu jednorodnego.

Uzyskane w pracy wyniki pozwalają na sformułowanie następujących wniosków ogólnych (szczegółowe przedstawiono w odnośnych rozdziałach):

1. Przebiegi funkcji  $K_e = f(\gamma, \epsilon_w, B_w)$  oraz  $\Phi = f(\epsilon_w, B_w)$ , ilustrują odpowiednio zmniejszenie energii wewnątrz ziarniaka oraz kształtowanie się momentu obrotowego działającego na ziarniak umieszczony w polu elektrostatycznym, otrzymane przy analizie modelu jednorodnego i modelu warstwowego są diametralnie różne.
2. Wykorzystując rozwiązania, otrzymane w wyniku zastosowania układu współrzędnych sferoidy wydłużonej, można stosować metodę W. N. Szmigiela do dokładnych pomiarów przenikalności dielektrycznej innych materiałów niż pojedynczy ziarniak. Uzyskana dokładność i prosta zasada pomiaru czyni metodę Szmigiela, zmodyfikowaną w tej pracy, konkurencyjną w stosunku do znanych metod mostkowych.

Problem badania zjawisk elektrycznych zachodzących w ziarnie pozostaje nadal otwarty. Wydaje się, że dalsze badania mające na celu doskonalenie teorii zastosowania pól elektrycznych w procesach czyszczenia, sortowania, suszenia i elektrostymulacji należałoby prowadzić w kierunkach takich jak:

- badanie właściwości elektrycznych wewnętrznej struktury ziarniaka;
- badanie zjawiska sił elektrostrykcyjnych występujących na granicach warstw ziarniaka i podjęcie prób wykorzystania ich do obniżania energochłonności suszenia ziarna;
- uwzględnienie w analizie matematycznej przewodności ziarniaka, co jest szczególnie istotne w procesie suszenia dielektrycznego przy dużej wilgotności ziarna;
- badanie wzajemnego oddziaływania ziarniaków w polu elektrycznym;
- rozpoznanie zjawisk występujących w ziarniaku przy umieszczeniu go w zmiennym polu elektrycznym.

## 11. PIŚMIENICTWO

1. **Basow A.M., Arnold A.E.:** Separation by particle orientation parameters (in Russian). Tr. Cz. I M.E.S.Ch., wyp. 75, 6-9, 1974.
2. **Basow A.M., Izakow F.J., Šmigiel W. N., Lukienko T. N., Jasnow G.A., Panus J. W.:** Electric devices for grain cleaning. Theory, construction and computations (in Russian). Maszynostrojenie, Moskwa 1968.
3. **Bateman H., Erdélyi A.:** Higher transcendental functions. Vol. 1, New York, Toronto, London, 1953. Mc Graw-Hill Book Company, INC.
4. **Biednow N.I.:** Determination of dielectric permittivity of humid grain (in Russian). Sb. Naucz. Rabot. Saratow. Selskochoz. Inst., wyp. 40, 13-16, 1974.
5. **Borodin I.F., Taruszkin W.I.:** Electrostatic classification of grain quality (in Russian). M i E. S. Ch., 7, 52-55, 1973
6. **Brynskij Je.A., Danilewicz Ja.B., Jakowlew W.I.:** Electromagnetic fields in electric machines (in Russian). Energia, Leningrad 1979
7. **Budzko I.A., Borodin I.F., Taruškina W.I.:** New method for grain separation in electrostatic field (in Russian). Westnik s.-ch. nauki 10, 98-105, 1972.
8. **Budzko I.A., Borodin I.F., Taruškina W.I.:** Methods to sort out grains in the electrostatic field (in Russian). M i E. S. Ch., 9, 32-35, 1974.
9. **Chelkowski A.:** Physics of dielectrics (in Polish). PWN, Warszawa 1979.
10. **Dąbrowski S., Grochowicz J., Pietrzyk W.:** Electric properties of seeds. Practical applications (in Polish). Problemy Agrofizyki, PAN, Zakład Agrofizyki w Lublinie, z. 35, 1981.
11. **Džuwarły Č.M., Wiečchajzer G.W., Štejnšrajber W.Ja.:** Three -dimensional dielectric ellipsoid in the electric field with the consideration of conductivity (in Russian). Izw. A.N. CCCP, Energetika i Transport nr 1, 158-162, 1969.
12. **Džuwarły Cz.M., Wieczchajzer G.W., Sztiejnšzrajbier W.Ja.:** Modelling particles of incorrect shape (in Russian). Energia, Moskwa 1971
13. **Gołowan A.T.:** Guide for electric engineers in process analyses (in Russian). Gosenergoizdat, Moskwa 1962.
14. **Graczowa L.I.:** Physical and electric of properties of feed and mixtures (in Russian). M i E. S. Ch., 10, 22-24, 1975.
15. **Graczowa L.I., Mierienbach Ja.F.:** The influence of parameters on electric characteristics of complex dielectrics (in Russian). Elektron. obrobotka materiałów 6, 68-71, 1978.

16. Harmond J.E., Brandenburg N.R., Booster D.E.: Seed cleaning by electrostatic separation. *Agricultural Engineering*, January, 22-25, 1961.
17. Horyński M., Pietrzyk W., Walusiak S.: Studies on dielectric permeability of rye grains in function of stresses (in Polish). *Zeszyty Problemowe Postępów Nauk Rolniczych PAN*, z. 425, 67-72, 1996.
18. Izakow F.Ja., Dmitriew W.I.: Computation of particle charges in electric separators. *M i E. S. Ch.*, 7, 40-41, 1975.
19. Jackson J.D.: *Classic electrodynamics* (in Polish). PWN, Warszawa 1980.
20. Jasnow G.A., Łaptiew A.W., Ajdarow Sz.G.: Theory of grain separation on a rotating cylindrical (in Russian). *Tr. Cz I M.E.S.Ch.*, wyp. 75, 16-22, 1974.
21. Jermolin M.Ja.: Nomograms to determine electrode separation properties in electric field (in Russian). *Tr. Cz i M.E.S.Ch.*, wyp. 75, 96-100, 1974.
22. Jermolin M.Ja.: Grain separation by electric properties (in Russian). *Tr. Cz i M.E.S.Ch.*, wyp. 85, 14-20, 1974
23. Kącki E.: *Partial differential equations in electrical engineering* (in Polish). WNT Warszawa, 1971.
24. Kozmina N.P.: *Grains and products after processing* (in Russian). Zagotizdot, Moskwa 1962.
25. Kozmina N.P.: *Grains* (in Russian). Zagotizdot, Moskwa 1969.
26. Kozmina N.P., Ljubarskij L.N.: *Grain and its quality asserment* (in Russian). Zagotizdat, Moskwa 1962.
27. Landau L.D., Liwzyc E.M.: *Electrodynamics of continuous media* (in Polish). PWN Warszawa 1960.
28. Landau L.D., Liwzyc E.M.: *Field theory* (in Polish). PWN, Warszawa 1980.
29. Lebediew N.N.: *Special functions and their applications* (in Russian). Nauka. Moskwa 1963.
30. Leonow W.S.: *Electric forces in heterogeneous field* (in Russian). *Sb. naucz. tr. Mosk. in-t. s-ch. proiz-wa* 5, 83-86, 1977.
31. Leonow W.S.: The influence of electric forces on grains during dielectric separation (in Russian). *M i E. S. Ch.*, 5, 32-34, 1980.
32. Leonow W.S.: The analysis of fields in bifilar devices for grain separation (in Russian). *M i E. S. Ch.*, 11, 28-30, 1980.
33. Lewitow B.I. : *Fume electrofilters* (in Russian). Energia, Moskwa 1980.
34. Lityński M.: *Biological background for seed production* (in Polish). PWN, Warszawa, 1977.
35. Ławrow I.M., Szmigiel W.N.: The influence of electrostatic field on grain (in Russian). *M i E. S. Ch.*, 12, 42-43, 1983.

36. **Łozanskij E.D., Firsow O.B.:** Spark theory (in Russian). Atomizdat. Moskwa, 1975.
37. **Majergojz I.D.:** Iteration methods of static field computations in heterogeneous and anisotropic non-linear environment (in Russian). Naukowa dumka. Kijew, 1979.
38. **Malinowski E.:** Plant anatomy (in Polish). PWN, Warszawa, 1966.
39. **Matthes R.K., Boyd A.H.:** Electrical Properties of Seed Associated with Viability and Vigor. Trans of the ASAE 12, N° 6, p. 778-781, 1969.
40. **Mieszkow A.A.:** The analysis of measurement methods for corona discharge field by SATO probe (in Russian). Tr. Cz. I.M.E.Ch., wyp. 75, 91-95, 1974.
41. **Moon P., Spencer D.E.:** Field Theory Handbook. Including Coordinate Systems Differential Equations and Their Solutions. Berlin 1961. Springer Verlag.
42. **Moon P., Spencer D.E.:** Field Theory (in Polish). PWN, Warszawa 1966.
43. **Naumow Je.M.:** Determination of dust particle properties (in Russian). Tr. Cz. I.M.E.Ch., wyp. 85, 64-69, 1974.
44. **Nelson S.O., Stetson L.E.:** 250-Hz to 12-GHz Dielectric Properties of Grain and Seed. Trans. of the ASAE 18, 714-718, 1975.
45. **Nelson S.O., Stetson L.E.:** Frequency and Moisture Dependence of the Dielectric Properties of Hard Red Winter Wheat. J. Agr. Eng. Res., nr 2, 181-192, 1976.
46. **Nelson S.O.:** Improved Sample Holder for Q-Meter Dielectric Measurements. Trans. of the ASAE 22, 950-954, 1979.
47. **Nelson S.O.:** Factors Affecting the Dielectric Properties of Grain. Trans. of the ASAE 25, 1045-1049, 1982.
48. **Nelson S.O.:** Dielectric Properties of Agricultural Products. Measurements and Applications. IEEE Transactions on Electrical Insulation, , v. 26, 845-869, 1991.
49. **Nelson S.O.:** Frequency, Moisture and Density Dependence of the Dielectric Properties of Small Grains and Soybeans. IEEE Transactions on Electrical Insulation, , v. 26, 1538-1541, 1991.
50. **Nesterenko A.D.:** Introduction to fundamental electrical engineering (in Russian). Naukowa dumka, Kijew, 1969.
51. **Oberhettinger F., Magnus W.:** Elliptical functions applied in physics and engineering (in Polish). PWN, Warszawa, 1963.
52. **Osborn J.A.:** Demagnetizing Factors of the General Ellipsoid. Phys. Rev., vol. 67, Nr 11-12, 1945.
53. **Ostrejko W.N.:** Computations of Electromagnetic Fields in Laminar Media (in Russian). Izd. Leningradskovo Uniwersiteta, Leningrad 1981.
54. **Piekara A.H.:** Electrics and magnetics (in Polish). PWN, Warszawa, 1970.

55. **Pietrzyk W.:** The influence of dielectric properties of particular grain layers on torque in electric field (in Polish). III Ogólnopolska Konf. Nauk.-Techn. "Budowa i Eksploatacja Maszyn Przemysłu Spożywczego", Lublin, 1984, 159-160.
56. **Pietrzyk W.:** Das Verhalten des Kornes von der Schichtenstruktur im elektrischen Feld. 10. International Kongress für Landwirtschaftstechnik. Budapest 3-7.IX.1984, Techn. Sekt. 2, t.2, 445-452.
57. **Pietrzyk W.:** Measurements of dielectric permittivity of prolate spheroid particles (in Polish). IX Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Politechnika Śląska, s.367-373, 1986.
58. **Pietrzyk W.:** Dielectric permittivity meter to measure relative permittivity of prolate spheroid particles - grains, in particular.(in Polish). Świadectwo autorskie nr 231645, Warszawa 19.07.1988.
59. **Pietrzyk W.:** Behaviour of elongated spheroid in homogeneous electrostatic field (in Polish), Archiwum Elektrotechniki, PAN t. XXXV, z. 136 -2/1986, 553-565, PWN Warszawa 1989.
60. **Pietrzyk W.:** Dielectric elongated spheroid of laminar structure in homogeneous electrostatic field (in Polish), Archiwum Elektrotechniki, PAN, t. XXXV, z. 136 -2/1986, 567-581, PWN Warszawa 1989.
61. **Pietrzyk W.:** Analysis of the electric field distribution in dielectric spheroid with laminar structure, located in homogeneous electrostatic field (in Polish). Archiwum Elektrotechniki, PAN, t. XXXV, z. 136 -2/1986, 583-589, PWN Warszawa 1989.
62. **Pietrzyk W.:** The symplified computation methods of energy and turning moment for spheroid with laminar structure, located in homogeneous electrostatic field (in Polish). Archiwum Elektrotechniki, PAN, t. XXXV, z. 136 -2/1986, 591-598, PWN Warszawa 1989.
63. **Pietrzyk W., Horyński M., Walusiak S., Sumorek A.:** Research on the influence of mechanical stresses on grain dielectric permittivity (in Polish). 30-Lecie Wydziału Elektrycznego 1964-1994 , 147-152 ,Wydawnictwa Uczelniane 1994.
64. **Pietrzyk W, Krakowiak J.:** Utilization of strong electrostatic field in drying process. Proc. of 7<sup>th</sup> International Symposium on High Voltage Engineering , Dresden, vol. 9, 37-38, August 26-30, 1991.
65. **Pietrzyk W., Sumorek A.:** The equation of ununiform drying of solids (in Polish). Materiały II Konferencji Naukowo-Technicznej pod patronatem Sekcji Teorii Elektrotechniki PAN „Zastosowania komputerów w elektrotechnice”, Poznań/Kiekrz, 7-9 kwietnia 1997, s. 127-129.

66. Pietrzyk W., Sumorek A.: The solution to drying equation of laminar structure solid (in Polish). Materiały III Konferencji Naukowo-Technicznej pod patronatem Sekcji Teorii Elektrotechniki PAN „Zastosowania komputerów w elektrotechnice”, Poznań/Kiekrz, 20-22 kwietnia 1998, s. 439-441.
67. Radomski J., Jasnowska J.: Botany (in Polish). PWN, Warszawa 1976.
68. Rešetka S.: Computations of fields in electromagnetic separators at constant forces (in Russian). Woprosy matematicheskoy fizyki i teorii funkcji. Kijew, 1964. Izd. AN USSR.
69. Ryżyk J. M., Gradštejn J. S.: Tables of integrals, sums, series and products (in Polish). PWN, Warszawa, 1964
70. Šapawalow Ł.W.: Separation of grains in electric field (in Russian). Tech.w S. Ch., 12/79, 10-13.
71. Šmigiel W. N.: Method to determine dielectric permittivity of ellipsoid particles - grains, in particular.(in Russian). Avtorskoje svidetielstvo, Nr 137582, Biulletien Izobrietienij, Nr 8, 1961.
72. Šmigiel W. N.: Sorting oat out of Avena fatua in the electrostatic field (in Russian). M i E. S. Ch., 9, 10 – 12, 1973.
73. Šmigiel W. N.: Sorting oat out of Avena fatua in the electrostatic field (in Russian). Elektronnaja Obrabotka Materialow, Nr 2, 1977.
74. Šmigiel W. N.: Particle movement on oscillating electrodes (in Russian). M i E. S. Ch., 3, 36-37, 1978.
75. Šmigiel W. N.: Grain orientation in electrostatic field (in Russian). M i E. S. Ch., 12, 36-38, 1978.
76. Šmigiel W. N.: Dielectric permittivity determination of ellipsoid particles (in Russian). M i E. S. Ch., 12, 29-31, 1982.
77. Šmigiel W. N.: Behaviour of charge particles in electrostatic fields (in Russian). M i E. S. Ch., 5, 13-14, 1996.
78. Šmigiel W. N.: Computations of grain movement in electric fields (in Russian). M i E. S. Ch., 8, 12-13, 1997.
79. Šmigiel W. N.: Determination of process parameters for grain treatment in electrostatic field (in Russian). M i E. S. Ch., 7, 19-20, 1998.
80. Šmigiel W. N., Dolgovych O. G.: Efficiency increase of drum separator with corona discharge (in Russian). M i E. S. Ch., 7, 9, 1997.
81. Šmigiel W. N., Grigorev W. G.: Electrical treatment of potato seeds (in Russian). M i E. S. Ch., 5, 9-11, 1996.
82. Šmigiel W. N., Hijazov A.M.: Grain layers in electric field (in Russian). M i E. S. Ch., 6, 13-14, 1998.

83. Šmigiel W.N., Jusubalev A.: Examination of the field intensity influence on grain inside (in Russian). *M i E. S. Ch.*, 4, 45-47, 1984.
84. Szot B., Grundas S.: Application of the measuring system to determine precisely basic dimensions of corn grains (in Polish). *Hodowla Roślin, Aklimatyzacja i Nasiennictwo*, 18, z.1, 103-112, 1974.
85. Stratton J.A. : *Electromagnetic Theory*. Mc. Graw- Hill Book Company, Inc., New York and London, 1941.
86. Suffczyński M.: *Electrodynamics* (in Polish), PWN, Warszawa 1980.
87. Szulkin P., Pogorzelski S.: *Fundamental theory of electromagnetic field* (in Polish). WNT, Warszawa 1964.
88. Sumorek A., Pietrzyk W.: The influence of electric field on kinetics in rape grain drying (in Polish). *Zeszyty Problemowe Postępów Nauk Rolniczych PAN*, z. 425, 235-240, 1996.
89. Sumorek A., Pietrzyk W.: Simplified solution to the equation of a laminar sphere drying (in Polish). *Materiały IV Konferencji Naukowo-Technicznej pod patronatem Sekcji Teorii Elektrotechniki PAN „Zastosowania komputerów w elektrotechnice”, Poznań/Kiekrz, 12-14 kwietnia 1999*, s. 213-215.
90. Tamm J.Je.: *Fundamental Electric Theory* (in Polish). WNT, Warszawa, 1967.
91. Taruшкин W. I.: Orientation intensity of seeds in electrostatic field (in Russian). *W. S. Ch. N.*, 90-94, 4/1972.
92. Taruшкин W. I.: The evaluation of seed quality by means of electric field (in Russian). *Westnik s.ch. nauki* 2, 116-122, 1975.
93. Taruшкин W. I.: Seed orientation in electrostatic field (in Russian). *Sb. naucz. tr. Mosk. in-t. s-ch. proiz-wa* 9, wyp. 3, cz. 1, 91-98, 1977.
94. Taruшкин W. I.: The influence of ponderomotive forces on seeds in the field generated by oppositely charged sheets (in Russian). *Mosk. in-t, inz. s.-ch. proiz-wa* 14, wyp. 5, 73-77, 1977.
95. Taruшкин W. I.: Methodology of computations of ponderomotive force (in Russian). *M. i E. S. Ch.*, 3, 34 – 35, 1978.
96. Taruшкин W. I.: Determination of electric forces in separating devices (in Russian). *M. i E. S. Ch.*, 31-32, 7/1979.
97. Taruшкин W. I.: Exchange of electric field energy in corn dielectric separators (in Russian). *M. i E. S. Ch.*, 33-35, 9/1982.
98. Taruшкин W. I.: Distribution of ponderomotive forces on grains during separation (in Russian). *M. i E.S.Ch.*, 35-39, 12/1983.
99. Taruшкин W. I.: Effectiveness of grain dielectric separation (in Russian). *M. i E. S. Ch.*, 5, 11 – 13, 1996

100. **Taruškin W. I., Baženov Ju. I.:** The effect of seed orientation reflected in seed division (in Russian). M. i E. S. Ch., 9, 13 – 15, 1974
101. **Taruškin W.I., Burlakov W.G.:** Seed Dielectric Classifier (in Russian). M. i E. S. Ch., 4, 34-37, 1981.
102. **Torosjan R. N., Konochova O. I.:** Examination of electrical and physical parameters of seeds (in Russian). M. i E. S. Ch., 1, 39-40, 1972.
103. **Wermer J.:** Potential theory. Berlin, Heidelberg, New York 1974. Springer – Verlag.
104. **Wunsch G.:** Feldtheorie. Elektromagnetische Felder. Band 2. Berlin 1975, VEB Verlag Technik..
105. **Zavjackas W. K.:** Orientation of grains in electrostatic field (in Russian). M. i E. S. Ch., 2, 39-41, 1973.
106. **Zavjackas W. K.:** Orientation of grains in electrostatic field (in Russian). M i E. S. Ch., 34-40, 7/1975.



## 12. STRESZCZENIE

Celem monografii jest opracowanie efektywnych algorytmów obliczeniowych rozkładu pola elektrostatycznego w jednorodnym jak i w wielowarstwowym modelu ziarna a także zademonstrowanie praktycznego wykorzystania tych wyników.

Stosowane w dotychczasowych pracach modele ziarna i problemy teoretycznej analizy jego pola przedstawiono w rozdziale trzecim. Analiza tych modeli i stosowanych metod obliczeniowych pozwoliła sformułować szereg problemów, których rozwiązanie podano w kolejnych rozdziałach.

W rozdziale piątym sformułowano założenia idealizujące, przy których przeprowadzono całość obliczeń zawartych w rozdziale szóstym, siódmym i ósmym. Istotną nowością w stosunku do znanych prac [1, 2, 11, 74, 75, 83, 85, 91, 106] jest przyjęcie warstwowej struktury ziarna i zastosowanie do obliczeń układu współrzędnych sferoidy wydłużonej.

W rozdziale szóstym wyznaczono rozkład pola w ziarnie o strukturze jednorodnej oraz wyznaczono moment działający nań w jednorodnym polu elektrostatycznym.

W rozdziale siódmym przeprowadzono analizę rozkładu pola i obliczono moment dla ziarna o strukturze niejednorodnej - warstwowej.

W rozdziale ósmym zademonstrowano uproszczoną metodę wyznaczania sił działających na ziarno w polu elektrycznym. Pozwala ona przy uwzględnieniu rzeczywistej – warstwowej struktury ziarna, uniknąć skomplikowanej procedury obliczeniowej, opracowanej w rozdziale siódmym, przy niewielkim stosunkowo obniżeniu dokładności.

Rozdział dziewiąty jest ilustracją praktycznego wykorzystania uzyskanych wyników do pomiaru przenikalności dielektrycznej pojedynczego ziarna.

Zasadniczymi rezultatami uzyskanymi w przedstawionej monografii są:

- algorytmy obliczeniowe rozkładu pola elektrostatycznego w ośrodku wielowarstwowym ziarna,
- obliczenie sił działających na ziarniak w polu elektrostatycznym,
- demonstracja możliwości wykorzystania tych wyników do dokładniejszych pomiarów przenikalności dielektrycznej,
- wskazanie na realną możliwość prowadzenia analizy matematycznej zjawisk w złożonej strukturze ziarniaka.

Słowa kluczowe: ziarniak w polu elektrostatycznym, siły ponderomotoryczne.

## 13. SUMMARY

### GRAIN MODELS APPLIED IN ELECTRODYNAMIC ANALYSIS

This monograph objective is elaboration of effective algorithms to compute electrostatic field distributions in a grain uniform model and a laminar model and also the presentation of practical applications of their results.

Chapter 3 presents grain models and the problems of theoretical analysis of grain field used so far. The analysis of these models and applied computation methods enables the formulation of the series of problems, the solutions to which are given in subsequent chapters.

Chapter 5 provides idealising assumptions established to carry out the computations included in Chapters 6, 7 and 8. The most important novelty in relation to known publications [1, 2, 11, 74, 75, 83, 85, 91, 106] is the assumption of laminar grain structure and the use of elongated spheroid co-ordinates for computing.

Chapter 6 determines the field distribution in the uniform grain and the momentum acting on it in a uniform electrostatic field.

Chapter 7 presents the analysis of field distribution and computations of the momentum for laminar grain structure.

Chapter 8 provides the simplified method to determine forces acting on a grain in the electrostatic field. This makes possible to avoid complicated computational procedure, elaborated in Chapter 7, when the real laminar grain structure is considered with only little less precision.

Chapter 9 illustrates the practical use of obtained results for the measurements of dielectric permittivity of a single grain.

The main results of this monograph are:

- computational algorithms of electrostatic field distribution in a laminar grain structure,
- computations of forces acting on grains in electrostatic field,
- demonstration of possibilities to use these results in more precise measurements of dielectric permittivity,
- the indication on real possibility to carry out mathematical analysis of phenomena in complex structure of a grain.

Key words: grain in electrostatic field, ponderomotive forces.

**Adres autora:**

**Prof. dr hab. inż. Wiktor Pietrzyk**  
**Politechnika Lubelska**  
**Wydział Elektryczny**  
**Katedra Elektrotechniki Ogólnej**  
**ul. Nadbystrzycka 38 A,**  
**20-618 Lublin**  
**tel / fax: +48 81 5381 299**  
**e-mail: [jwipi@elektron.pol.lublin.pl](mailto:jwipi@elektron.pol.lublin.pl)**